L'expérience des limites.
Aspects mathématiques de l'impossible

Henri Volken
Université de Lausanne

30 avril 1992 [1]

[1]Conférence donnée à l'Université de Genève dans le cadre de l'enseignement d'Histoire et de Philosophie des Sciences

Trois problèmes classiques

En règle générale, on fait appel aux mathématiciens pour trouver une solution à un problème posé. C'est par un calcul, c'est-à-dire une manipulation symbolique, et un peu d'imagination, que ceux-ci procèdent. Parfois cependant, un problème n'a pas de solution. Et ce résultat, quoique négatif, n'est pas négligeable, bien au contraire, il est d'une grande utilité. Il nous fait réfléchir sur les conditions et la nature du problème, sur sa cohérence et il nous informe sur les limites de sa solubilité, et par là, sur les limites du contexte dans lequel le problème a été posé.

Imaginez que vous soyez prisonnier d'un labyrinthe et que vous soyez à la recherche d'une issue. Vous pouvez élaborer différentes stratégies pour tenter d'y arriver: par exemple de prendre toujours à gauche lorsque vous avez un choix, ou de marquer chaque carrefour atteint et d'explorer toutes les possibilités du dernier carrefour avant de retourner plus en arrière.

S'il existe une issue et que votre méthode de recherche est raisonnable, vous allez finir par trouver votre chemin. Mais prenons le cas où le labyrinthe est complexe et étendu et de surcroît ne possède pas de sortie. Vous risquez alors rapidement de ne plus savoir où vous en êtes. Il vous sera, en effet, très difficile d'acquérir la conviction que votre tentative est impossible. Il vous semblera simplement que parmi les nombreuses possibilités offertes, vous n'avez pas encore trouvé la bonne, celle qui vous permettra de vous échapper.

Pour avoir cette conviction absolue de l'impossibilité d'une solution, il faut un changement de perspective, il faut pouvoir s'élever au-dessus du labyrinthe, que ce soit physiquement ou à l'aide d'un plan ou d'une autre représentation. C'est uniquement ainsi, en perdant de vue les détails du labyrinthe réel, mais en découvrant sa structure abstraite, topologique dirait le mathématicien, qu'on peut avoir l'illumination de cette impossibilité.

Et c'est précisément l'un des buts de la démarche mathématique de permettre ou de favoriser ce genre d'illuminations le plus souvent possible.

Nous allons évoquer quelques cas où ce changement de perspective, cette abstraction, nous permet d'avoir une certitude sur les limites de nos activités. Cette certitude n'est pas une intuition directe, mais sera acquise grâce à une théorie mathématique qui porte sur des objets qui se comportent de manière analogue à ceux qui sont présents dans le contexte du problème. Il s'agit en quelque sorte d'une intuition assistée par les mathématiques.

L'abstraction et l'analogie seront donc des pas essentiels vers la connaissance de certaines de nos limites, et les mathématiques constitueront une méthode privilégiée pour les découvrir.

Ce qui distingue au premier abord les mathématiques des autres discours scientifiques, c'est son formalisme et la rigueur de son organisation déductive. Mais c'est également son abstraction, qui en fait, pour certains, une activité très éloignée de nos préoccupations quotidiennes. Quelle est la vision que l'on a la plupart du temps de l'activité mathématique? On s'attend en général à ce que les mathématiques établissent l'existence de tel objet ou de telle propriété, qu'elles déterminent les solutions de telle équation ou qu'elles permettent telle construction géométrique.

Bref, et pour simplifier, on peut admettre que les mathématiques semblent répondre essentiellement à deux types de questions, si l'on suppose un domaine et une propriété donnés:

- Tous les objets de ce domaine ont-ils cette propriété?
- Y a-t-il un objet dans ce domaine qui possède cette propriété?

Quelques exemples pour illustrer le premier type:

> Tous les nombres pairs plus grands que deux peuvent-ils s'écrire comme la somme de deux nombres premiers?
>
> Tous les polygones du plan sont-ils constructibles?
>
> Toutes les matrices régulières possèdent-elles une inverse?

Quelques exemples du second type:

> Y a-t-il un nombre premier qui soit plus grand que tous les autres?
>
> L'équation $x^n + y^n = z^n$ a-t-elle une solution en nombres entiers, pour un exposant n donné?
>
> Y a-t-il une méthode, un algorithme dans le langage du mathématicien, pour calculer la n-ième décimale de π?

Les réponses à ces questions sont soit affirmatives, soit négatives, soit indéterminées.

Dans le premier groupe une réponse positive prend la forme d'une démonstration dans laquelle on montre pour un objet quelconque qu'il possède la propriété voulue sans jamais utiliser les particularités de cet objet. Une réponse négative par contre, consiste à présenter un contre-exemple, c'est-à-dire un objet dont l'une des particularités fait qu'il ne peut pas avoir telle propriété.

Dans le second groupe de questions, une réponse affirmative consiste à désigner un tel objet, ou au besoin à le construire. Une réponse négative cependant implique de montrer soit que l'existence d'un tel objet entraîne une contradiction, soit que chaque objet du domaine considéré est lui-même directement en contradiction avec la propriété en question.

Bien sûr, tous les résultats négatifs cités témoignent d'une limitation. Mais le message n'est pas le même. Car si on se laisse convaincre facilement qu'une certaine équation n'a pas de solution, il n'en va pas de même lorsqu'il s'agit d'admettre qu'il n'existe pas de méthode pour résoudre tel problème. Après tout, il se peut que l'on n'ait pas découvert cette méthode, mais que dans un proche futur ce soit chose faite. Parcourir mentalement un domaine de nombres, ou d'objets simples, pose apparemment moins de problèmes que de le faire pour un ensemble de constructions ou de méthodes ou de démonstrations comme nous allons le voir.

Certains problèmes, particulièrement difficiles, ont pu, par le passé, recevoir le qualificatif d'*insolubles.* Mais cela n'a souvent pas découragé les amateurs, et la recherche d'une solution miraculeuse s'est poursuivie parfois pendant des siècles.

Historiquement ce sont trois problèmes célèbres qui ont préoccupé les mathématiciens pendant plus de deux mille ans:

I La duplication d'un cube

II La trisection d'un angle

III La quadrature du cercle

Ce dernier problème est d'ailleurs devenu dans le langage courant une expression synonyme pour une entreprise impossible.

L'origine de ces problèmes est très ancienne [5]. Le premier, connu sous le nom de "problème déliaque" remonterait au VI^e siecle avant notre ère. Il doit son nom à la légende qui veut que l'oracle de Délos ait exigé que l'on double l'un de ses autels. Le problème II est d'origine obscure mais probablement lié aux efforts des anciens grecs de trouver des méthodes de constructions de polygones.

Le problème III est lié au calcul de l'aire du cercle, ce qui constitue une très ancienne préoccupation dont les traces remontent jusqu'en 1650 av. J.-C. comme l'atteste le manuscrit Rhind conservé au British Museum [4].

Ces problèmes ont en commun leur origine. Ils sont issus de tentatives très concrètes d'appliquer les méthodes mathématiques aux activités humaines, très souvent aux activités rituelles: construire un monument cubique de volume double de celui d'un cube donné, diviser un angle en trois pour construire un polygone donné, utilisé par exemple en architecture, ou encore, pour des raisons diverses, mesurer l'aire d'un cercle.

Construire signifie dans ce contexte construire avec une règle et un compas. Il faut rappeler qu'à cette époque les longueurs, angles, surfaces ou volumes étaient traités comme des "grandeurs" et non pas mesurés par des nombres comme aujourd'hui. Actuellement on pourrait passer d'une telle grandeur à un nombre, puis opérer sur ce nombre en divisant par trois ou en prenant la racine, puis en retournant ainsi aux grandeurs originelles. Il y a projection de la réalité géométrique dans un monde arithmétique dans lequel le problème posé est plus facilement soluble.

Mais comment les mathématiques peuvent-elles "quantifier" sur un ensemble de constructions? Comment peuvent-elles nous persuader qu'il n'y a pas de méthode possible pour construire un tel cube, ou une telle trisection?

Le chemin a été très long effectivement. Il a fallu plus de deux mille ans pour établir l'impossibilité des trois constructions correspondant aux trois problèmes cités. Il aura fallu le développement de l'algèbre moderne, en particulier la théorie des groupes, pour qu'au dix-neuvième siècle, on puisse donner les réponses définitives. En 1837 le mathématicien français Wantzel règle les deux premières questions dans un article de six pages. Un peu plus tard, en 1882, c'est le mathématicien allemand Lindemann qui réussit à montrer, en une douzaine de pages, l'impossibilité de la quadrature du cercle.

Ces démonstrations passent par une chaîne déductive qui relie les constructions avec la règle et le compas à la notion de nombre *constructible* puis de nombre *algébrique* et finalement de nombre *transcendant* c'est-à-dire *non-algébrique*. On peut montrer que:

— les constructions correspondent aux nombres constructibles

— les nombres rationnels sont constructibles

— les nombres constructibles sont algébriques

— les nombres algébriques constructibles sont définis par des polynômes irréductibles dont le degré est une puissance de 2

Le point important est celui d'une correspondance entre la notion de "construction" et celle de "nombre constructible". Le nombre constructible est une extension du nombre rationnel, mais on peut l'obtenir par une simple itération de l'opération "racine carrée". Il s'agit donc d'un univers qui, d'une certaine manière, ne dépasse pas ce que l'on peut atteindre en additionnant, en multipliant et en prenant la racine carrée.

Plus précisément Wantzel [11] a montré que dans le cas de la duplication du cube ainsi que pour la trisection de l'angle, la solution correspond à un nombre algébrique défini par un polynôme irréductible de degré 3. Donc la solution n'est pas liée à un nombre constructible. Il est par conséquent impossible de construire à l'aide du compas et de la règle des solutions à ces deux problèmes.

Lindemann [6] de son côté a montré, que π était un nombre transcendant, donc un nombre non-constructible. Ainsi toute construction géométrique faisant intervenir ce nombre ne peut pas s'effectuer uniquement en utilisant la règle et le compas. C'est le cas en particulier de la quadrature du cercle.

Ces trois problèmes classiques donnent une première idée du pouvoir des mathématiques d'explorer leurs propres frontières. Ici la quantification sur un domaine apparemment aussi imprécis que celui des "constructions à l'aide du compas et de la règle", est rendue possible par une projection, en l'occurence sur l'ensemble des nombres constructibles, qui permet de passer d'objets concrets complexes à des objets abstraits simples qui représentent d'une certaine manière la même réalité. C'est sur ces derniers objets que portent alors les démonstrations d'impossibilité dont il est question.

Aux frontières de la formalisation

Bien que les problèmes que nous venons d'évoquer concernent des activités humaines, la construction, à l'aide d'outils simples, d'objets géométriques jouant un rôle dans la vie courante, leur portée reste relativement modeste. Les limitations que nous avons rencontrées sont certes étonnantes et précises, mais concernent un domaine très marginal du travail scientifique actuel.

Un problème différent, mais presque aussi ancien, nous conduit à des frontières autrement plus inquiétantes de la pensée. Un problème qui a permis, ou plutôt imposé, une réflexion profonde sur la méthode axiomatique, ce qui a amené une clarification nécessaire des concepts d'axiome et de modèle. Il s'agit du débat autour du cinquième postulat d'Euclide, le postulat des parallèles, et de son statut épistémologique: est-ce un axiome, donc une affirmation "évidente" dans une première acception du terme, ou peut-on, et doit-on, le démontrer? Il a fallu plus de deux mille ans de patients travaux, de disputes et d'errements [8] pour arriver à la notion de système axiomatique que nous connaissons aujourd'hui. Dans celui-ci les axiomes sont un point de départ ou d'ancrage, formels, et ne représentent plus forcément des intuitions premières, mais permettent d'engendrer tout un édifice déductif qui peut très bien correspondre à des réalités, à des modèles différents.

De tout temps s'est posée la question de la représentation du savoir mathématique. Les succès dans ce domaine ont beaucoup et durablement influencé le développement de la science, il suffit de penser à l'importance de la *notation*, comme dans le cas de la représentation décimale des nombres réels, ou plus récemment du formalisme de l'algèbre de la logique due à G.Boole.

C'est dans la méthode axiomatique cependant que s'est manifesté l'un de plus purs achèvements des mathématiques. Attribuée à Euclide, la méthode axiomatique est devenue non seulement la méthode de présentation par excellence des théories mathématiques, mais elle a contribué essentiellement à l'organisation déductive des théories mathématiques et à la clarification de la notion de preuve ou de démonstration.

A la suite des travaux de Boole, de Frege, de Peano, de Russell et bien d'autres, s'est construit au début de ce siècle une formalisation de certaines parties importantes des sciences mathématiques. Elle a suscité l'espoir de trouver une théorie axiomatisée unique qui permettrait non seulement de fonder tout le savoir mathématique, mais offrirait encore la possibilité d'engendrer *mécaniquement* toutes les vérités mathématiques par le jeu des dérivations.

Cet espoir constitue une partie du célèbre "programme" de Hilbert, par lequel une partie des mathématiciens exprimaient leur foi dans la méthode axiomatique et dans la portée des nouvelles méthodes formelles de la logique mathématique.

De développement en développement, la question fondamentale, qui remonte à Leibniz et à sa quête d'une langue universelle, s'est précisée et c'est finalement le mathématicien allemand Hilbert qui l'a formulée avec le plus de conviction au début de ce siècle dans son programme qui demandait qu'on réponde aux questions suivantes:

> Peut-on trouver un système formel consitent [1] et complet [2] , suffisamment puissant pour engendrer tout notre savoir mathématique?
>
> Peut-on trouver une procédure de décision qui nous permette de savoir si une formule est démontrable ou non?
>
> Peut-on démontrer avec des méthodes similaires [3] que ce système est consistent?

Adopter le programme formaliste de Hilbert consistait à tout mettre en œuvre pour répondre affirmativement à ces trois questions.

La surprise est venue en 1931 d'un jeune logicien autrichien, Kurt Gödel, qui a montré dans un travail relativement court [3], mais d'une originalité stupéfiante, que la réponse était négative, du moins si la question était posée en termes aussi strictes: on ne pouvait pas satisfaire simultanément à toutes ces exigences.

Ce fameux théorème d'incomplétude de Gödel est à l'origine de nombreux résultats d'impossibilités. Et cette fois la nature des limites découvertes est beaucoup plus profonde. C'est notre conception de la production et de l'organisation logique de notre savoir mathématique qui est touchée.

Que dit ce théorème de Gödel exactement? Il faut se rappeler que les développements de la logique mathématique, de Boole à Hilbert, en passant par Frege, Peano, Whitehead et Russel, avaient introduit un langage formel et des méthodes mécaniques de dérivation qui permettaient de s'exprimer dans un langage précis et univoque et d'imiter formellement l'idée de démonstration.

Les affirmations deviennent des formules de ce nouveau langage, et les théories deviennent des ensembles de formules. L'équivalent formel de *vrai* devient *dérivable.* D'un ensemble de formules on exige avant tout deux propriétés fondamentales: la consistence et la complétude. "Consistent" signifie qu'une telle théorie ne doit pas "prouver" une formule et sa négation. "Complet" signifie que tout ce qui est vrai doit être démontrable, autrement dit dérivable dans le sens formel. Le contenu précis du théorème de Gödel est le suivant:

> Toute théorie consistente, dans laquelle on peut exprimer, au moins, l'arithmétique élémentaire, n'est pas complète. C'est-à-dire qu'elle contient des formules, correspondant à des affirmations vraies, qu'on ne peut pas prouver dans cette théorie.

Cela signifie très clairement que toute théorie de quelque intérêt pour les mathématiques est soit contradictoire, donc sans valeur, soit incomplète, c'est-à-dire qu'elle

[1] Cela signifie que le système ne permet pas de dériver une contradiction.
[2] Dans le sens que toutes les vérités sont dérivables.
[3] Des méthodes *finitaires* dans le vocabulaire de Hilbert.

n'a pas le pouvoir de démontrer toutes les vérités qu'elle contient. Il s'agit donc d'une limitation sévère de la méthode axiomatique puisqu'elle montre qu'on ne peut pas capter dans un système formel toutes les vérités, et semble donc bien contredire le fameux programme de Hilbert [4].

La démonstration du théorème d'incomplétude de Gödel est pour l'essentiel une transposition rigoureuse du parodoxe de Richard dans l'univers des systèmes formalisés.

Ce paradoxe est le suivant:

> Considérons les expressions de la langue française qui définissent des propriétés de nombres. Par exemple: "...est un nombre premier." ou "...est divisible par dix-sept.". On peut arranger en une séquence [5] toutes ces expressions:
>
> $$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots$$
>
> On écrira par exemple $\mathcal{A}_5(7)$ si la propriété numéro 5 s'applique au nombre 7.
>
> Nous pouvons alors définir la propriété suivante: "...n'a pas la propriété exprimée par le terme correspondant dans la séquence.", c'est-à-dire,
>
> "n n'a pas la propriété $\mathcal{A}_n$."
>
> Mais cette propriété doit elle-même figurer dans la liste, donc elle porte un numéro précis, disons k. On aura donc $\mathcal{A}_k(n)$ si la propriété numéro n ne s'applique pas à n. Mais en remplaçant n par k on aura que cette propriété $\mathcal{A}_k$ s'applique au nombre k si et seulement si elle ne s'applique pas à lui!

Si l'on veut transposer ce paradoxe dans un système formel, deux difficultés se présentent immédiatement:

1. A l'intérieur du système nous ne pouvons pas exprimer que quelque chose est vrai.

2. Dans cette théorie une formule ne peut, en principe, parler que de nombres et non pas d'elle-même ou de sa propre démontrabilité.

Gödel a réussi à surmonter ces deux difficultés, en utilisant la notion de dérivabilité à la place de vérité, et en proposant une notion de codification des formules dans les nombres naturels, la *gödélisation*, de manière à permettre une forme d'autoréférence. En effet, si l'on numérote les formules on peut aussi numéroter les

[4]Toutefois, la controverse n'est pas terminée aujourd'hui sur cette question [2]. La difficulté provient probablement en grande partie de la relative imprécision dans la formulation du programme.

[5]En les ordonnant de manière alphabétique par exemple.

séquences de formules, donc les dérivations. Dire alors d'une formule qu'elle est dérivable revient à dire qu'entre son code et le code d'une dérivation il existe une certaine relation arithmétique. C'est l'un des grands mérites de Gödel d'avoir précisé ces notions en introduisant notamment le concept de *fonction récursive* [6].

Grâce à cette approche, la traduction du paradoxe nous permet de trouver une formule φ analogue à $\mathcal{A}_k(k)$ qui signifie "je ne suis pas démontrable". Or si φ est vrai, cela veut dire que φ n'est pas démontrable, donc la théorie est incomplète en ce sens qu'il existe quelque chose de vrai qui ne peut pas être démontré. Et si φ est faux, cela signifie que φ est démontrable, et on peut montrer que dans ce cas la négation de φ l'est également et ainsi la théorie est contradictoire. En clair, une théorie comme celle que nous venons d'évoquer ne peut pas être simultanément consistente et complète.

Le caractère paradoxal de la situation a disparu, et il reste un théorème, mathématique dans son essence, mais dont la portée dépasse largement le cadre habituel du discours mathématique. Il nous informe en effet sur les limites mêmes de la méthode qui a été utilisée pour sa propre démonstration.

Ce théorème capital dans l'expérience des limites de la formalisation du savoir mathématique est à l'origine, directement ou indirectement, de toute une série de résultats analogues. Voici quelques exemples: Tarski a montré que le concept de "vérité" n'était pas formalisable; Gödel a montré, dans un deuxième théorème célèbre, qu'une théorie consistente ne pouvait pas prouver sa propre consistence; Turing a montré que l'arithmétique élémentaire déjà était indécidable [7], c'est-à-dire qu'il ne peut pas exister de procédure qui indique pour une affirmation quelconque en arithmétique si celle-ci est vraie.

Comme dans le cas des trois problèmes classiques, il s'agit ici d'une précision sur la limitation des outils mathématiques utilisés. Mais la portée du résultat est, cette fois, beaucoup plus dramatique: il montre, en effet, que la méthode axiomatique et la notion de dérivabilité ne suffisent pas à engendrer toutes les vérités mathématiques. Nos méthodes sont limitées de manière absolue. Il ne suffit donc pas, par exemple, de prendre la formule φ comme nouvel axiome, car le système ainsi constitué possédera une nouvelle formule, correspondant à une affirmation vraie, mais pas démontrable. Et ainsi de suite. Mais ce résultat montre aussi dans le même temps, que jamais un ordinateur ne pourra être programmé pour produire tous les résultats mathématiques. Ce qui valorise et rend plus créatif le travail du mathématicien.

Il est intéressant de noter que cette information a été obtenue à nouveau par une abstraction et une analogie, cette dernière se manifestant par une *projection* des formules d'une théorie formalisée vers des nombres naturels qui en deviennent les codes. La connaissance des frontières est obtenue, ici également, par un changement

[6] *Primitive-récursive* dans notre terminologie actuelle

[7] Grâce à son concept de "machine de Turing" et du théorème sur l'arrêt de ces machines.

radical de perspective et l'exploitation d'une parenté établie entre deux domaines très différents.

Limites du choix démocratique

Les mathématiques nous limitent donc dans le domaine des constructions géométriques et, fait beaucoup plus grave, dans nos méthodes de représentation et de production du savoir formalisé.

Mais nous allons voir que même dans le domaine de nos procédures démocratiques, les mathématiques peuvent nous indiquer des frontières surprenantes que nous serions incapables de découvrir autrement.

Nous allons parler ici du choix social, tel que nous le rencontrons couramment dans les procédures de votations, de classification et d'élections.

Pour simplifier considérons une situation dans laquelle une collectivité fait un choix en se basant sur les choix des différents individus sur la même question.

Le problème du choix social est alors celui d'imposer une préférence, celle de la collectivité, qui tienne compte au mieux des différents choix exprimés par les individus. Mais comme la collectivité ne peut pas tenir compte de toutes les opinions individuelles, il faut définir des critères qu'une "bonne" fonction de choix social devrait remplir.

On peut bien sûr avoir différents points de vue sur les critères auxquels le choix collectif devrait satisfaire. Et probablement qu'aucun critère ne pourra faire l'unanimité. Nous allons néanmoins essayer un peu plus loin de retenir quelques principes généraux que toute procédure démocratique devrait respecter.

Tout d'abord décrivons la situation de manière simplifiée mais un peu plus précise. La collectivité est représentée par un ensemble I d'individus, numérotés $1, 2, \ldots, n$. Ces individus doivent indiquer leurs préférences [8] sur un certain nombre d'objets soumis à leur appréciation. Les objets sur lesquels porte le choix forment un ensemble A. Il peut s'agir de candidats lors d'une élection, d'objets concrets, de projets à soutenir, de postulants à engager, de thèmes à traiter etc. L'ensemble des avis exprimés par les individus, qu'on peut noter p_i pour le choix de l'individu i, constitue un *profil*.

Nous allons illustrer cela par un petit exemple. Une collectivité de trois personnes, $I = \{1, 2, 3\}$, s'exprime sur quatre objets, $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Le profil est le suivant:

P_1	P_2	P_3
α	β	$\alpha - \gamma$
β	α	δ
$\gamma - \delta$	γ	β
	δ	

[8] Dans le sens technique précis d'une relation transitive et asymétrique, donc d'un préordre strict.

Comment tenir compte de ces avis individuels et établir un ordre qui représente le choix de la collectivité?

Le problème du choix social est donc de faire correspondre à un profil donné un ordre de préférences [9] sur les objets de A en respectant le mieux possible la diversité des choix exprimés.

Que peut-on et que doit-on exiger d'une fonction de choix social raisonnable? Il faut rappeler ici le paradoxe de Condorcet qui montre que, dans notre contexte, la loi de la simple majorité n'est pas une fonction de choix admissible [10].

P_1	P_2	P_3
α	β	γ
β	γ	α
γ	α	β

Dans cet exemple, la loi de la simple majorité veut que l'on préfère α à β, et β à γ et finalement, γ à α. Mais cela contredit la transitivité qui, elle, réclame que l'on préfère α à γ!

Que faut-il alors exiger? Nous allons décrire quatre critères, quatre *axiomes* dans la terminologie mathématique, qui semblent communément admis et traduisent le "sentiment" démocratique courant. Il s'agit des axiomes de K.Arrow [1].

Axiome 1 (Association du choix social et individuel) *Si la fonction de choix social place l'objet α avant l'objet β, elle le fera encore après les changements suivants:*

1. *Aucun individu ne change d'avis sur ses préférences concernant des objets différents de α.*
2. *Si un individu change d'avis sur sa préférence entre α et un autre objet, c'est en faveur de α.*

Axiome 2 (Indépendance par rapport aux autres alternatives) *Soit B un sous-ensemble de A. Si un profil est modifié de telle manière que les préférences individuelles parmi les objets de B ne sont pas touchées, les préférences exprimées par la fonction de choix social parmi les objets de B n'auront pas changé non plus.*

Axiome 3 (Souveraineté du citoyen) *Pour chaque paire d'objets α et β, il existe un profil pour lequel la fonction de choix social place α avant β.*

[9] Dans le même sens que pour les choix individuels: une relation transitive et asymétrique.

[10] Ce paradoxe montre que dans certains cas les avis individuels peuvent à ce point se contredire, que la loi de simple majorité ne peut pas en déduire un ordre raisonnable [9]

Axiome 4 (Absence de dictateur) *Il n'y a pas de dictateur, c'est-à-dire un individu tel, que la fonction de choix social a toujours les mêmes préférences que lui, indépendamment du choix des autres individus.*

Ces axiomes paraissent raisonnables, du moins après quelques réflexions sur la question. Il semble qu'une fonction de choix social réellement démocratique doive remplir ces conditions. Or le résultat de K.Arrow, un théorème purement mathématique, découvre un autre type de limite dans nos activités. En effet, Arrow montre dans un théorème célèbre que dans des conditions normales une fonction de choix ne peut pas satisfaire simultanément aux quatre conditions exprimées par les axiomes 1 à 4.

Le résultat précis est le suivant:

> Si la collectivité est formée d'au moins deux personnes, et si le choix porte sur au moins trois objets, il ne peut pas exister de fonction de choix social satisfaisant aux quatre axiomes d'Arrow.

Cette constatation, bien qu'étant de nature négative puisqu'elle révèle une incompatibilité entre plusieurs idées sur le choix démocratique, nous oblige à nous pencher de manière approfondie sur les différents concepts en présence.

La discussion sur ce sujet a été très vive et fructueuse en ce sens qu'elle a amorcé une tentative de clarification à la fois de notre vision de la démocratie, et aussi de notre façon de représenter et de formaliser notre savoir de ce domaine [7].

L'une des conséquences de cette controverse a été le fait que l'on a reconsidéré de manière très critique le contenu des quatre axiomes. L'axiome 2 a été le plus âprement discuté. On a donné des exemples pour montrer sa fragilité. Un des points qui ressort de cette discussion est le fait que la *force de préférence* n'a pas été prise en compte. Cela a donné lieu à quelques variantes intéressantes.

Globalement cependant il n'a pas été trouvé de consensus sur un ensemble d'axiomes différents. Et les ensembles proposés ont montré le même type d'incompatibilité!

On a suggéré également de ne tenir compte que du premier choix de chaque individu, c'est-à-dire de l'objet qu'il préfère à tous les autres, ou d'admettre une relation d'ordre différente, un ordre partiel par exemple, pour les choix des individus et pour le choix social.

Finalement, une approche différente [9] propose de ne pas exiger comme résultat du choix social une réponse unique, mais plusieurs si celles-ci sont "plausibles".

Toute cette controverse, extrêmement fructueuse par la recherche de précision dans le vocabulaire et les définitions qu'elle provoque, a rendu attentif un autre public, plus large, aux résultats d'impossibilité que les mathématiques peuvent établir. L'expérience des frontières permet une nouvelle fois, et dans un contexte moins exclusivement "mathématique", de remettre en question certaines de nos intuitions familières qui ne semblent pas a priori sujettes à l'inquisition mathématique.

Mathématiques et impossible

Les quelques exemples que nous venons d'évoquer, et qui montrent des situations où les mathématiques parlent de leurs propres limites, ne sont nullement isolés.

Ils ont été choisis, de manière un peu arbitraire, pour illustrer trois domaines d'activités pour lesquels il ne semble pas exister d'autres frontières que celle de l'imagination:

> les classiques constructions géométriques à l'aide de la règle et du compas,
>
> le problème capital de l'axiomatisation des mathématiques et de la mécanisation de la démonstration,
>
> et enfin le problème, peut-être moins connu sous cet aspect, de la traduction démocratique d'un choix collectif.

Nous avons vu que ces problèmes n'ont pas eu la solution attendue. Et dans chaque cas, c'est un événement extérieur, souvent le développement d'une théorie sans rapport direct avec le sujet, qui a permis, après l'établissement d'une analogie précise, de donner une réponse négative finale.

Les problèmes classiques de constructions géométriques, très anciens, n'ont été résolus que dans le courant du siècle passé, après des efforts de plus de deux mille ans. Et la solution ridiculisait en quelques dizaines de pages, des efforts continus de plusieurs siècles. Bien sûr, et c'est un point important, cette solution s'appuyait sur les développements fulgurants de l'algèbre et ses résultats les plus récents.

L'impossibilité ne se manifeste ainsi qu'après une simplification extrême et une projection dans un domaine abstrait, dans lequel se révèle une frontière structurelle.

Ainsi en est-il de la formalisation, cette tentative d'uniformiser et de mécaniser le travail mathématique. Les formules, qui expriment directement des affirmations mathématiques, sont projetées par un codage dans l'univers des nombres afin de rendre possible l'auto-référence et ainsi montrer une impossibilité, celle d'obtenir la complétude.

Le choix démocratique, notre troisième exemple, est en fait le problème de trouver un processus qui permette le passage d'un ensemble d'avis individuels à un avis collectif, tout en respectant certaines règles démocratiques. C'est en traduisant cette situation en termes mathématiques de relations, autrement dit en la réduisant à un problème mathématique, qu'un avis définitif a pu être donné sur la question. Le problème mathématique étant celui de trouver une fonction qui passe d'un profil, c'est-à-dire d'une séquence d'ordres, à un ordre particulier. En essayant d'exprimer dans ce langage des relations binaires les propriétés que nous estimons être caractéristiques du fait démocratique, nous nous apercevons que l'ensemble des désirs ainsi exprimés n'est pas réalisable simultanément. Il nous faut nécessairement renoncer à l'une au moins des propriétés désirées.

Ce qui rend possible finalement l'apparition de résultats d'impossibilité, c'est la simplification, l'abstraction extrême qui permet au mathématicien et au chercheur de ne voir plus que l'aspect schématique d'une situation, la forme tout à fait générale d'une structure.

L'approche mathématique de la réalité impose donc d'une part une très grande pauvreté en ce qui concerne les détails vivants, concrets, mais offre par contre une vision plus globale et, en particulier, une vision des frontières beaucoup plus riche que ne le permettent d'autres points de vue.

Ce qui distingue finalement les mathématiques de nombreuses disciplines de la pensée, c'est la précision avec laquelle certaines de ses frontières sont évoquées dans leur propre discours. Beaucoup de résultats importants limitent explicitement certaines activités ou constructions ou décrivent des barrières infranchissables. Et si l'on s'étonne en général très peu de certains résultats techniques qui évoquent l'impossibilité de l'existence de tel objet mathématique particulier dans un contexte obscur et spécialisé, on est en revanche beaucoup plus choqué d'entendre que cette frontière peut se prolonger en quelque sorte jusque dans des domaines de notre vie quotidienne.

Ces quelques évocations de frontières présentées ici nous montrent un point important de la méthodologie scientifique: les efforts déployés en vue de *formaliser* une partie d'une discipline, peuvent s'avérer très salutaires. Non seulement ils obligent le chercheur à préciser de manière stricte ses concepts et ses arguments, mais dans certains cas l'amènent à faire l'expérience de limites inconnues, qui donneront peut-être une orientation et une impulsion nouvelles à sa démarche.

La condition pour que de telles expériences de limites puissent avoir lieu, est la connaissance et le goût des objets formels, même exotiques, et une vision claire de leur comportement. Et si l'on accorde au mathématicien une liberté absolue dans sa recherche et dans sa création, on devrait également encourager tout scientifique à fréquenter souvent l'inépuisable bestiaire mathématique. La découverte de nouvelles frontières se fait parfois à ce prix-là.

References

[1] K. Arrow. *Social Choice and Individual Value.* John Wiley, New York, 1951.

[2] M. Detlefsen. "On an alleged refutation of Hilbert's program using Gödel's first incompleteness theorem". *Journal of Philosophic Logic* 19 (1990), 343-377.

[3] K. Gödel. "Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I". *Monat. Math. Phys.* 38, 173-198.

[4] E. W. Hobson. *Squaring the circle.* Cambridge University Press, 1913.

[5] A. Jones, S. A. Morris, K. R. Pearson. *Abstract Algebra and Famous Impossibilities.* Springer, New York, 1991.

[6] F. L. Lindemann. "Ueber die Zahl π". *Mathematische Annalen*, 20 (1882), 213-225.

[7] R. D. Luce, H. Raiffa. *Games and Decisions.* John Wiley, New York, 1957.

[8] J. C. Pont. *L'aventure des parallèles.* Lang, Bern, 1986.

[9] F. S. Roberts. *Discrete Mathematical Models.* Prentice-Hall, Englewood Cliff, 1976.

[10] W. Stegmüller. *Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit.* Springer, Wien, 1973.

[11] M. L. Wantzel. "Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas". *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2 (1837), 366-372.