Y a-t-il une dynamique du savoir?

Henri Volken
Université de Lausanne

17 mai 1995[1]

[1] Conférence donnée à la Faculté des Sciences de l'Université de Lausanne

1 Introduction

Aucun savoir n'est définitif. Bien sûr. Tout fait nouveau, toute idée surgie, toute observation insolite peut s'imposer et bousculer le savoir établi. Ou simplement augmenter celui-ci.

Dans ce dernier cas, le changement se fait en douceur, de manière cumulative, si l'élément nouveau n'est pas en contradiction avec les connaissances antérieures. C'est la phase monotone, dans le sens précis où le savoir augmente dans la même mesure que des éléments nouveaux sont assimilés.

C'est l'idée qu'on se fait généralement de l'évolution des sciences: on l'assimile à une accumulation de découvertes à un corps du savoir existant qui augmente ainsi de manière constante, toujours dans le sens d'une plus grande étendue.

Ce n'est pas la seule forme de changement possible. Mais c'est la plus simple.

Il en va tout autrement cependant lorsque la nouvelle donnée introduit une contradiction avec l'état de connaissance présent. Dans ce cas-là, son intégration pose des problèmes plus délicats. Il faut en effet - et c'est le prix à payer pour cette intégration - renoncer à une partie du savoir acquis, des croyances anciennes. L'évolution ne sera plus monotone. Ce qui était acquis un jour n'est plus forcément vrai à la lumière des nouvelles découvertes.

Dans d'autre cas, c'est le statut épistémique d'un élément du savoir qu'on désire changer: quelque chose que nous tenions pour vrai est reconnu ou déclaré faux. Le raisonnement par l'absurde utilise ce mécanisme. Et bien d'autres formes de raisonnement hypothétique [4].

La dynamique du savoir, si elle existe, se décompose donc en plusieurs mouvements élémentaires, dont les suivants, les seuls que nous allons considérer dans cet exposé: comment une information nouvelle est-elle ajoutée, imposée ou soustraite de l'ensemble de nos connaissances ?

Le savoir dont il s'agira ici sera le savoir individuel. Le modèle que nous allons utiliser pour le représenter ne tiendra pas compte des aspects psychologiques, mais constituera une idéalisation rationnelle des connaissances [3]. De plus, nous aurons en vue de préférence le savoir scientifique d'un individu. Cela nous permettra dans une première approche de ne pas distinguer *savoir*, *croire* et *admettre*. D'autres aspects plus complexes de l'évolution du savoir, comme l'intuition, les actes de foi religieux et les illuminations mystiques par exemple, ne seront pas pris en compte.

Avant de pouvoir analyser ces changements puis éventuellement modéliser leur dynamique, il faut parler de la représentation des connaissances par des objets formels. Dans le cadre limité où nous nous trouvons, nous allons nous limiter à un seul modèle, celui d'*état épistémique* [2], celui qui utilise à la base le langage de la logique du premier ordre.

L'avantage de cette approche est que par là nous disposons également d'une structure déductive. Car l'ensemble des éléments qui composent un savoir, n'est pas dépourvu de toute structure. Nous allons par la suite établir quelques exigences minimales concernant celle-ci. Mais il est clair que nous ne connaissons pas que les faits élémentaires, mais également des vérités *déduites*.

C'est la relation de déduction qui jouera un rôle important dans l'établissement de ces exigences. Elle permettra de considérer un état du savoir comme un état d'équilibre. Et de modéliser le cadre rationnel des différentes opérations d'acquisition et d'assimilation du savoir en utilisant le langage et les méthodes de la logique formelle.

2 La représentation du savoir

Le savoir dont il s'agit ici, est un donc avant tout un savoir scientifique simple. L'individu sait, croit, admet ou accepte quelque chose. Dans notre approche, nous exprimerons les éléments de ce savoir dans un langage formalisé, plus précisément dans le langage de la logique du premier ordre. Pour simplifier, nous appellerons phrases les formules fermées de ce langage. Les phrases formerons les éléments de base pour la description du savoir. L'ensemble de toutes les phrases qu'il est possible de former sera noté Π.

Nous ne distinguerons donc pas dans ce cadre le savoir de la croyance. L'état du savoir sera ainsi identifié à la structure d'*ensemble de croyances*. Cette notion englobe notre attitude épistémique envers les éléments du savoir: quels sont les phrases que nous admettons, quelles sont celles que nous rejettons, et finalement quelles sont celles auxquelles nous sommes indifférents. Dans le cas probabiliste, une attitude plus nuancée est possible comme nous le verrons. En effet, des degrès de croyances pourront être introduits.

Le savoir, Γ, que nous essayons de représenter, est un sous-ensemble de Π, mais en plus il possède une structure logique minimale.

Nous supposons une logique sous-jacente qui détermine une relation de déduction $\Gamma \vdash \varphi$. Cette logique doit satisfaire les conditions suivantes:

(LOG1) Le modus ponens est respecté: $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ pour tous les ψ.

(LOG2) Le théorème de la déduction est vérifié: Si $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, alors $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

(LOG3) La relation de déduction est compacte: Si $\Gamma \vdash \psi$ alors il existe un sous-ensemble fini de Γ, Γ', tel que $\Gamma' \vdash \psi$

(LOG4) La logique sous-jacente est explosive: $\varphi \wedge \neg\varphi \vdash \psi$ pour tout ψ.

L'opérateur Cn permet de regrouper dans un ensemble $Cn(\Gamma)$ toutes les déductions à partir de phrases de Γ. Il nous permet d'exprimer de manière simple les exigences de rationalité minimales. Le savoir sera représenté par le concept d'*ensemble de croyances*.

Nous appellerons *ensemble de croyances* tout ensemble consistant de phrases Γ, qui contient toutes ses conséquences, c'est-à-dire, tel que $Cn(\Gamma) = \Gamma$. Formellement, il s'agira donc d'un point fixe de l'opérateur Cn. Un ensemble de phrases est consistant, s'il ne contient pas de contradiction $\varphi \wedge \neg\varphi$.

Un *état épistémique* sera caractérisé par l'expression d'une *attitude épistémique*, qui décrit l'attitude de l'individu face aux éléments du savoir, dans notre cas, face aux phrases.

Nous allons envisager deux attitudes possibles, deux formes différentes de considérer les connaissances ou les croyances.

Dans le cas déterministe, l'attitude épistémique consiste à sélectionner un ensemble Γ, les phrases acceptées, et un ensemble de phrases rejetées. Dans le cas le plus simple on peut considérer qu'une phrase φ est rejetée si la phrase $\neg\varphi$ est acceptée. Les autres phrases sont indéterminées.

Dans le cas probabiliste, une attitude épistémique est donnée par une fonction de probabilité sur Π. L'individu exprime un *degré* de croyance ou d'acceptation d'une phrase par un indice, la valeur de cette fonction pour la phrase en question.

Cette fonction est soumise aux conditions suivantes:

(PR1) $0 \leq P(\varphi) \leq 1$

(PR2) $P(\varphi) = P(\varphi \wedge \varphi)$

(PR3) $P(\varphi \wedge \psi) = P(\psi \wedge \varphi)$

(PR4) $P(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)) = P((\varphi \wedge \psi) \wedge \theta)$

(PR5) $P(\varphi) + P(\neg\varphi) = 1$

(PR6) $P(\varphi) = P(\varphi \wedge \psi) + P(\varphi \wedge \neg\psi)$

Nous introduisons les définitions suivantes:

(DEF1) φ est logiquement nécessaire si et seulement si $P(\varphi) = 1$ pour tout P

(DEF2) φ et ψ sont logiquement disjoints si et seulement si $\neg(\varphi \wedge \psi)$ est logiquement nécessaire.

Nous avons immédiatement les deux résultats intéressants:

Théorème 1 *Une phrase est logiquement nécessaire si et seulement si elle est une tautologie.*

Théorème 2 *Si φ et ψ sont incompatibles, alors pour toute fonction de probabilité on a $P(\varphi \vee \psi) = P(\varphi) + P(\psi)$*

Le cas probabiliste est plus général que le cas des ensembles de croyances. Le lien entre les deux approches est donné par

(EC) Une fonction de probabilité P engendre l'ensemble de croyances Γ si et seulement si $P(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma$.

Le résultat suivant donne le résultat essentiel

Théorème 3 *Γ est un ensemble de croyances non-absurde si et seulement s'il existe une fonction de probabilité P qui engendre Γ.*

L'ensemble de croyances absurde étant Π.

3 L'expansion

L'un des processus les plus courants de la transformation d'un savoir est l'assimilation d'un élément nouveau qui soit plausible, c'est-à-dire par rapport auquel on soit épistémologiquement neutre. C'est le phénomène habituel de l'apprentissage: dans un état de savoir Γ on apprend φ et on passe en un nouvel état de connaissance.

Cette opération, que l'on appelle *expansion*, est modélisée mathématiquement par une fonction qui à un ensemble de croyances Γ et une phrase φ fait correspondre un nouvel ensemble de croyances Γ^+_φ.

Cela impose un premier axiome

(EXP1) Pour tout φ, Γ^+_φ est un ensemble de croyances

D'autre part nous exigeons que l'opération soit un succès, c'est-à-dire que le nouvel élément soit assimilé au savoir

(EXP2) $\varphi \in \Gamma^+_\varphi$

L'expansion doit en suite être une véritable augmentation du savoir. Elle doit en particulier conserver intégralement le savoir initial

(EXP3) $\Gamma \subseteq \Gamma^+_\varphi$

Cela reste vrai même dans cas où l'on tente d'intégrer un élément contradictoire: Si $\neg\varphi \in \Gamma$, alors $\Gamma^+_\varphi = \Pi$, c'est-à-dire le résultat est l'ensemble de croyances absurde.

Un autre cas particulier est constitué par l'intégration d'un élément φ qui fait déjà partie de l'ensemble de croyances Γ. Ce cas est réglé par l'axiome suivant:

(EXP4) Si $\varphi \in \Gamma$, alors $\Gamma^+_\varphi = \Gamma$

Cela peut se produire dans le cas où φ fait partie effectivement de Γ sans que cela soit perçu consciemment.

Lorsqu'un savoir Γ est plus étendu qu'un autre Δ, le processus d'expansion doit se comporter de manière monotone:

(EXP5) Si $\Gamma \subseteq \Delta$, alors $\Gamma^+_\varphi \subseteq \Delta^+_\varphi$

Ces cinq axiomes contiennent une partie des exigences de rationalité que nous voulons imposer à l'opération d'expansion. Mais ils ne sont pas suffisants. On peut définir l'expansion de la manière suivante

$$\Gamma^+_\varphi := \Pi$$

Cette définition satisfait les axiomes 1 à 5 comme on peut le vérifier aisément. Mais l'ensemble de croyances ainsi obtenu est beaucoup trop grand.

L'axiome suivant exprime l'idée que le changement provoqué par φ dans l'état de savoir doit être minimal.

(EXP6) Pour tous les ensembles de croyances Γ et pour toutes les phrases φ, Γ_φ^+ est le plus petit ensemble de croyances qui satisfasse les axiomes (EXP1) à (EXP5)

L'un des candidats pour le rôle de l'expansion qui se présente spontanément est $Cn\{\Gamma \cup \{\varphi\}\}$, la fermeture déductive de l'ensemble $\Gamma \cup \{\varphi\}$. En effet, nous avons pour toute opération d'expansion qui satisfait les axiomes 1 à 5 la propriété suivante:

$$Cn\{\Gamma \cup \{\varphi\}\} \subseteq \Gamma_\varphi^+$$

En présence d'une opération qui satisfasse en plus l'axiome 6, nous avons

Théorème 4 *Une opération d'expansion satisfait (EXP1) à (EXP6) si et seulement si* $\Gamma_\varphi^+ = Cn\{\Gamma \cup \{\varphi\}\}$

Démonstration: On a $Cn\{\Gamma \cup \{\varphi\}\} \subseteq \Gamma_\varphi^+$ en présence des axiomes 1 à 5. Car

$$\begin{array}{rcl} \theta \in Cn\{\Gamma \cup \{\varphi\}\} & \Leftrightarrow & \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \theta \\ & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \theta \\ & \Rightarrow & \Gamma_\varphi^+ \vdash \varphi \rightarrow \theta \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{or } \varphi \in \Gamma_\varphi^+ \text{ donc } \Gamma_\varphi^+ \vdash \varphi & \Rightarrow & \Gamma_\varphi^+ \vdash \theta \\ & \Rightarrow & \theta \in \Gamma_\varphi^+ \end{array}$$

et, bien sûr, $\Gamma_\varphi^+ \subseteq Cn\{\Gamma \cup \{\varphi\}$.

D'autre part, si l'on définit $\Gamma_\varphi^+ := Cn\{\Gamma \cup \{\varphi\}\}$, il est aisé de vérifier les six axiomes (EXP1) à (EXP6). $\Box$

Remarques: 1) Si $\psi \in \Gamma_\varphi^+$, alors $\psi \in \Gamma$ ou $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$. Car

$$\begin{array}{rcl} \psi \in \Gamma_\varphi^+ & \Leftrightarrow & \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \\ & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \\ & \Leftrightarrow & \varphi \rightarrow \psi \in \Gamma \end{array}$$

Cela signifie que ce qui existe dans l'ensemble de croyances augmenté, ou bien figurait déjà dans l'ensemble de départ, ou alors y préexistait sous forme conditionnelle.

2) On a aussi, si $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, alors $\Gamma^+_\varphi = \Gamma^+_\psi$.

Le résultat d'une expansion dépend donc du contenu logique des phrases, et non de leur forme syntaxique.

3) Deux expansions successives peuvent être remplacées par une seule:

$$(\Gamma^+_\varphi)^+_\psi = \Gamma^+_{\varphi\wedge\psi}$$

Appendice

En résumé, voici les six axiomes auquels doit satisfaire l'opération d'expansion:

(EXP1)	Pour tout φ, Γ^+_φ est un ensemble de croyances
(EXP2)	$\varphi \in \Gamma^+_\varphi$
(EXP3)	$\Gamma \subseteq \Gamma^+_\varphi$
(EXP4)	Si $\varphi \in \Gamma$, alors $\Gamma^+_\varphi = \Gamma$
(EXP5)	Si $\Gamma \subseteq \Delta$, alors $\Gamma^+_\varphi \subseteq \Delta^+_\varphi$
(EXP6)	Pour tous les ensembles de croyances Γ et pour toutes les phrases φ, Γ^+_φ est le plus petit ensemble de croyances qui satisfasse les axiomes (EXP1) à (EXP5)

4 La révision

L'expansion correspond à une opération cumulative, à un apprentissage de quelque chose considéré comme plausible. Or parfois, il se trouve que le nouvel élément que l'on veut ajouter à son savoir se trouve en contradiction avec l'état du savoir actuel. Il faut alors abandonner une partie de celui-ci. La nouvelle opération qui permet cela, la révision, sera non-monotone dans le sens où les croyances ne pourront pas toujours être conservées intégralement lors de l'assimilation d'un élément nouveau.

Comme pour l'expansion nous allons établir des critères de rationalité auxquels devra satisfaire cette opération.

Le premier axiome garantit simplement que le résultat de cette opération nous donne effectivement un nouvel ensemble de croyances:

(REV1) Pour tout φ, et tout ensemble de croyances Γ, Γ^*_φ est un ensemble de croyances

Le deuxième axiome exige le succès de l'opération

(REV2) $\varphi \in \Gamma^*_\varphi$

Le groupe des deux axiomes suivants fixe le rapport avec l'opération plus simple d'expansion. La révision n'ajoute rien de plus que l'expansion à un ensemble de croyances. Dans le cas d'un élément plausible, les deux opérations se confondent:

(REV3) $\Gamma^*_\varphi \subseteq \Gamma^+_\varphi$

(REV4) Si $\neg\varphi \notin \Gamma$, alors $\Gamma^+_\varphi \subseteq \Gamma^*_\varphi$

Nous exigeons ensuite que la révision nous permette d'intégrer, sans explosion, le plus de savoir nouveau. Il est évident cependant que si $\neg\varphi$ est logiquement nécessaire, l'ensemble de croyances ainsi créé sera l'emsemble Π.

(REV5) $\Gamma^*_\varphi = \Pi$, si et seulement si $\vdash \neg\varphi$

Ensuite il est clair que nous voulons que le résultat ne dépende que du contenu logique des phrases, et non de leur forme.

(REV6) Si $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, alors $\Gamma^*_\varphi = \Gamma^*_\psi$

L'inverse bien sûr n'est pas vrai, quoique $\varphi \leftrightarrow \psi$ soit un élément de Γ^*_φ.

Le mécanisme de la révision devient plus complexe lorsqu'on envisage l'itération du procédé et son rapport avec les opérations logiques.

(REV7) $\Gamma^*_{\varphi\wedge\psi} \subseteq (\Gamma^*_\varphi)^+_\psi$

(REV8) Si $\neg\psi \notin \Gamma^*_\varphi$, alors $(\Gamma^*_\varphi)^+_\psi \subseteq \Gamma^*_{\varphi\wedge\psi}$

Ce groupe d'axiomes précise l'action de révision par rapport à la conjonction. On pourrait donner une forme équivalente utilisant la disjonction.

Ces huit axiomes contiennent toutes les exigences logiques que nous imposons à la révision en tant qu'opération sur un ensemble de croyances. Cependant, contrairement à l'exemple de l'expansion, ils ne suffisent pas à définir de manière univoque l'opération de révision. Il faut d'autres facteurs épistémiques pour déterminer entièrement cette opération.

Un principe important dans le cas de l'expansion n'est plus vérifié ici: il s'agit de la monotonie telle qu'elle apparait dans l'axiome (EXP5).

Nous n'avons pas en général

(MON) Si $\Gamma \subseteq \Delta$, alors $\Gamma^*_\varphi \subseteq \Delta^*_\varphi$

Appendice

Récapitulation des axiomes:

(REV1) Pour tout φ, et tout ensemble de croyances Γ, Γ^*_φ est un ensemble de croyances

(REV2) $\varphi \in \Gamma^*_\varphi$

(REV3) $\Gamma^*_\varphi \subseteq \Gamma^+_\varphi$

(REV4) Si $\neg\varphi \notin \Gamma$, alors $\Gamma^+_\varphi \subseteq \Gamma^*_\varphi$

(REV5) $\Gamma^*_\varphi = \Pi$, si et seulement si $\vdash \neg\varphi$

(REV6) Si $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, alors $\Gamma^*_\varphi = \Gamma^*_\psi$

(REV7) $\Gamma^*_{\varphi\wedge\psi} \subseteq (\Gamma^*_\varphi)^+_\psi$

(REV8) Si $\neg\psi \notin \Gamma^*_\varphi$, alors $(\Gamma^*_\varphi)^+_\psi \subseteq \Gamma^*_{\varphi\wedge\psi}$

5 La contraction

L'opération de contraction consiste à supprimer une phrase φ d'un ensemble de croyances Γ. Le problème est de supprimer avec φ toutes ses conséquences, tout en conservant le plus possible du savoir Γ.

Comme dans le cas de la révision, les critères de rationalité, purement logiques, ne suffiront pas à déterminer entièrement la contraction.

Ces critères sont les suivants:

Tout d'abord nous exigeons que le résultat soit à nouveau un ensemble de croyances:

(CON1) Pour tout φ, et tout ensemble de croyances Γ, Γ^-_φ est un ensemble de croyances

Ensuite l'opération ne doit pas introduire de croyances nouvelles:

(CON2) $\Gamma^-_\varphi \subseteq \Gamma$

Pour des raisons d'économie de changement, nous demandons

(CON3) Si $\varphi \notin \Gamma$, alors $\Gamma^-_\varphi = \Gamma$

Le succès de l'opération doit être limité au cas où φ n'est pas logiquement nécessaire

(CON4) Si $\nvdash \varphi$, alors $\varphi \notin \Gamma^-_\varphi$

Ces axiomes (CON1) à (CON4) impliquent la propriété suivante

$$\text{Si } \varphi \in \Gamma, \text{ alors } (\Gamma^-_\varphi)^+_\varphi \subseteq \Gamma$$

C'est-à-dire que si nous opérons une contraction suivi d'une expansion sur un ensemble de croyances, nous ne retrouvons rien de plus que ce que nous avions au départ.

L'axiome suivant exige en plus que nous retrouvions toutes ces croyances

(CON5) Si $\varphi \in \Gamma$, alors $\Gamma \subseteq (\Gamma^-_\varphi)^+_\varphi$

De manière similaire à (REV6) nous voulons que ce soit le contenu logique qui détermine la dynamique

(CON6) Si $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, alors $\Gamma^-_\varphi = \Gamma^-_\psi$

En ce qui concerne le comportement de la contraction par rapport aux opérations logiques, celui-ci est réglé par les deux axiomes suivants

(CON7) $\quad \Gamma^-_\varphi \cap \Gamma^-_\psi \subseteq \Gamma^-_{\varphi\wedge\psi}$

(CON8) $\quad$ Si $\varphi \notin \Gamma^-_{\varphi\wedge\psi}$, alors $\Gamma^-_{\varphi\wedge\psi} \subseteq \Gamma^-_\varphi$

On peut montrer qu'en présence des axiomes (CON1) à (CON6), le principe suivant est équivalent aux axiomes (CON7) et (CON8)

Ou $\quad \Gamma^-_{\varphi\wedge\psi} \subseteq \Gamma^-_\varphi, \quad$ ou $\quad \Gamma^-_{\varphi\wedge\psi} \subseteq \Gamma^-_\psi, \quad$ ou $\quad \Gamma^-_{\varphi\wedge\psi} = \Gamma^-_\varphi \cap \Gamma^-_\psi$

Comme dans le cas de la révision, l'opération n'est pas monotone. La propriété suivante n'est pas vérifiée généralement

(MON) $\quad$ Si $\Gamma \subseteq \Delta$, alors $\Gamma^-_\varphi \subseteq \Delta^-_\varphi$

Les opérations de révision et de contraction ne sont pas indépendantes.

La thèse de Levi permet de définir l'opération de révision en fonction de la contraction.

(DEF*) $\quad \Gamma^*_\varphi = (\Gamma^-_{\neg\varphi})^+_\varphi$

Les théorèmes suivants montrent que cette définition est raisonnable.

Théorème 5 *Si une fonction de contraction satisfait (CON1) - (CON8) et la fonction d'expansion satisfait (EXP1) - (EXP6), alors la fonction de révision obtenue par le biais de la thèse de Levi satisfait (REV1) - (REV8).*

Dans le cas de la logique classique, on peut définir la contraction en fonction de la révision.

La thèse de Harper permet de le faire

(DEF-) $\quad \Gamma^-_\varphi = \Gamma \cap \Gamma^*_{\neg\varphi}$

Là aussi, les deux résultats suivants montrent le bien-fondé de la chose.

Théorème 6 *Si une fonction de révision satisfait (REV1) - (REV8), alors la fonction de contraction obtenue par la thèse de Harper saisfait (CON1) - (CON8).*

Appendice

Récapitulation des axiomes de la contraction:

(CON1) Pour tout φ, et tout ensemble de croyances Γ, Γ^-_φ est un ensemble de croyances

(CON2) $\Gamma^-_\varphi \subseteq \Gamma$

(CON3) Si $\varphi \notin \Gamma$, alors $\Gamma^-_\varphi = \Gamma$

(CON4) Si non $\vdash \varphi$, alors $\varphi \notin \Gamma^-_\varphi$

(CON5) Si $\varphi \in \Gamma$, alors $\Gamma \subseteq (\Gamma^-_\varphi)^+_\varphi$

(CON6) Si $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, alors $\Gamma^-_\varphi = \Gamma^-_\psi$

(CON7) $\Gamma^-_\varphi \cap \Gamma^-_\psi \subseteq \Gamma^-_{\varphi\wedge\psi}$

(CON8) Si $\varphi \notin \Gamma^-_{\varphi\wedge\psi}$, alors $\Gamma^-_{\varphi\wedge\psi} \subseteq \Gamma^-_\varphi$

6 Le modèle probabiliste

Pour décrire les conditions de rationalité que nous voulons imposer à l'opération d'expansion, nous avons besoin de la définition suivante

(MEL) Si P et P' sont deux fonctions de probabilité, alors $(P\lambda P')$ est un lambda-mélange de P et P' défini de la manière suivante: $(P\lambda P')(\varphi) = \lambda \cdot P(\varphi) + (1-\lambda)\cdot P'(\varphi)$ si P et P' sont non-absurdes, et $(P\lambda P_\bot) = P$ et $(P_\bot \lambda P) = P$ dans les autres cas.

La fonction de probabilité absurde, $P_\bot$, est la fonction constante $P(\varphi) = 1$.

Cela nous permet d'écrire le premier axiome gouvernant l'expansion dans le cas probabiliste

(P^+1) Si φ et ψ sont incompatibles, c'est-à-dire, lorsque $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$, alors $P^+_{\varphi\wedge\psi} = P^+_\varphi \lambda P^+_\psi$, où $\lambda = P(\varphi)/P(\varphi \vee \psi)$

Ceci est l'axiome de base principal.

L'axiome suivant exige le succès de l'opération

(P^+2) $P^+_\varphi(\varphi) = 1$

Lorsqu'on ajoute une vérité logique, l'état épistémique ne change pas

(P^+3) Si $\vdash \varphi$, alors $P^+_\varphi = P$

Et finalement

(P^+4) $P^+_\varphi = P_\bot$ si et seulement si $P(\varphi) = 0$

Or dans la tradition Bayesienne la probabilité conditionnelle constitue le candidat idéal pour l'expansion. Nous définissons donc

(DEF+) P^+_φ est la fonction de probabilité conditionnelle par rapport à φ. Elle est définie de la manière suivante: $P^+_\varphi(\psi) := P(\psi \mid \varphi) = P(\psi \wedge \varphi)/P(\varphi)$

Le théorème suivant justifie entièrement ce choix.

Théorème 7 *La fonction de probabilité conditionnelle est la seule fonction à satisfaire les axiomes (P^+1) à P^+4).*

Si le problème de l'expansion est facilement réglé, il n'en va pas de même pour la contraction et la révision.

Nous voulons bien sûr que le résultat d'une révision soit une nouvelle fonction de probabilité

(P^*1) Pour toutes les fonctions de probabilité P et toutes les phrases φ, P^*_φ est une fonction de probabilité.

L'opération doit aboutir à un succès

(P^*2) $P^*_\varphi(\varphi) = 1$

Et comme dans la cas déterministe, le résultat ne doit pas dépendre de la forme mais uniquement du contenu logique

(P^*3) Si $\varphi \leftrightarrow \psi$, alors $P^*_\varphi = P^*_\psi$

La fonction obtenue par l'opération de révision ne doit pas être absurde sauf dans le cas où $\vdash \neg\varphi$

(P^*4) $P^*_\varphi \neq P_\perp$ si et seulement si $\nvdash \neg\varphi$

Dans le cas où φ est compatible avec P, nous demandons que le changement soit minimal

(P^*5) Si $P(\varphi) > 0$, alors $P^*_\varphi = P^+_\varphi$

Ces axiomes forment les exigences de base. En ce qui concerne le rapport avec les opérations logiques, l'axiome suivant règle la question

(P^*6) Si $P^*_\varphi(\psi) > 0$, alors $P^*_{\varphi\wedge\psi} = (P^*_\varphi)^+_\psi$

On peut définir un ensemble de croyances à partir d'une fonction de probabilité

$$\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow P(\varphi) = 1$$

Théorème 8 *Si une fonction de révision satisfait (P^*1) à (P^*6), alors la fonction de révision définie sur l'ensemble de croyances associé satisfait (REV1) à (REV8).*

L'opération de contraction doit satisfaire six axiomes. Les exigences de base sont contenues dans les trois axiomes

(P^-1) Pour toutes les fonctions de probabilité P et toutes les phrases φ, P^-_φ est une fonction de probabilité.

($P^{-}2$) $\quad P^{-}_{\varphi}(\varphi) < 1$ si et seulement si $\not\vdash \varphi$

($P^{-}3$) $\quad$ Si $\varphi \leftrightarrow \psi$, alors $P^{-}_{\varphi} = P^{-}_{\psi}$

Dans le cas où φ n'est pas accepté par P nous avons

($P^{-}4$) $\quad$ Si $P(\varphi) < 1$, alors $P^{-}_{\varphi} = P$

En opérant d'abord une contraction et ensuite une expansion, nous ne perdons rien de l'état de savoir initial

($P^{-}5$) $\quad$ Si $P(\varphi) = 1$, alors $(P^{-}_{\varphi})^{+}_{\varphi} = P$

Finalement le dernier axiome est plus complexe

($P^{-}6$) $\quad$ Si $P^{-}_{\varphi\wedge\psi}(\neg\varphi) > 0$, alors $P^{-}_{\varphi}(\theta \mid \neg\varphi) = P^{-}_{\varphi\wedge\psi}(\theta \mid \neg\varphi)$ pour tout θ

Définissons à nouveau un ensemble de croyances à partir d'une fonction de probabilité

$$\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow P(\varphi) = 1$$

Nous avons alors le résultat suivant

Théorème 9 *Si une fonction de contraction satisfait* ($P^{-}1$) *à* ($P^{-}6$)*, alors la fonction de contraction définie sur l'ensemble de croyances associé satisfait (CON1) à (CON8).*

La thèse de Levi peut être adaptée pour le cas probabiliste

(DEF P*) $\quad P^{*}_{\varphi} := (P^{-}_{\neg\varphi})^{+}_{\varphi}$

La fonction de révision ainsi définie possède bien les qualités voulues

Théorème 10 *Si une fonction de contraction satisfait* ($P^{-}1$) *à* ($P^{-}6$)*, alors la fonction de révision définie à l'aide de la définition précédente satisfait les axiomes* ($P^{*}1$) *à* ($P^{*}6$)

A l'inverse, nous pouvons également définir une fonction de contraction à partir d'une fonction de révision.

(DEF P-) $\quad P^{-}_{\varphi} := P\lambda P^{*}_{\neg\varphi}$ où $1 > \lambda$ si et seulement si $P(\varphi) = 1$ et $\lambda = 1$ sinon.

La fonction de contraction ainsi définie possède bien les qualités voulues.

Théorème 11 *Si une fonction de révision satisfait* ($P^{*}1$) *à* ($P^{*}6$)*, alors la fonction de contraction associée satisfait les axiomes* ($P^{-}1$) *à* ($P^{-}6$)

Appendice

Révision des axiomes probabilistes pour l'expansion:

($P^{+}1$) Si φ et ψ sont incompatibles, c'est-à-dire, lorsque $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$, alors $P^{+}_{\varphi\wedge\psi} = P^{+}_{\varphi}\lambda P^{+}_{\psi}$, où $\lambda = P(\varphi)/P(\varphi \vee \psi)$

($P^{+}2$) $P^{+}_{\varphi}(\varphi) = 1$

($P^{+}3$) Si $\vdash \varphi$, alors $P^{+}_{\varphi} = P$

($P^{+}4$) $P^{+}_{\varphi} = P_{\perp}$ si et seulement si $P(\varphi) = 0$

Révision des axiomes probabilistes pour la contraction:

($P^{-}1$) Pour toutes les fonctions de probabilité P et toutes les phrases φ, P^{-}_{φ} est une fonction de probabilité.

($P^{-}2$) $P^{-}_{\varphi}(\varphi) < 1$ si et seulement si $\not\vdash \varphi$

($P^{-}3$) Si $\varphi \leftrightarrow \psi$, alors $P^{-}_{\varphi} = P^{-}_{\psi}$

($P^{-}4$) Si $P(\varphi) < 1$, alors $P^{-}_{\varphi} = P$

($P^{-}5$) Si $P(\varphi) = 1$, alors $(P^{-}_{\varphi})^{+}_{\varphi} = P$

($P^{-}6$) Si $P^{-}_{\varphi\wedge\psi}(\neg\varphi) > 0$, alors $P^{-}_{\varphi}(\theta \mid \neg\varphi) = P^{-}_{\varphi\wedge\psi}(\theta \mid \neg\varphi)$ pour tout θ

Révision des axiomes probabilistes pour la révision:

($P^{*}1$) Pour toutes les fonctions de probabilité P et toutes les phrases φ, P^{*}_{φ} est une fonction de probabilité.

($P^{*}2$) $P^{*}_{\varphi}(\varphi) = 1$

($P^{*}3$) Si $\varphi \leftrightarrow \psi$, alors $P^{*}_{\varphi} = P^{*}_{\psi}$

($P^{*}4$) $P^{*}_{\varphi} \neq P^{*}_{\perp}$ si et seulement si non $\vdash \neg\varphi$

($P^{*}5$) Si $P(\varphi) > 0$, alors $P^{*}_{\varphi} = P^{+}_{\varphi}$

($P^{*}6$) Si $P^{*}_{\varphi}(\psi) > 0$, alors $P^{*}_{\varphi\wedge\psi} = (P^{*}_{\varphi})^{+}_{\psi}$

7 Conclusion

Dans le cadre restreint de cet exposé, nous avons abordé trois formes d'évolution du savoir: l'expansion, la contraction et la révision. Les modèles proposés permettant deux types d'attitude épistémique envers les objets de connaissance: l'attitude déterministe et l'attitude probabiliste. Dans le premier cas, on accepte, on rejette ou l'on est indifférent envers une phrase. Dans le second, tous les degrés de croyance intermédiaires sont possibles.

Les résultats essentiels sont les suivants:

L'expansion seule possède la caractéristique de donner lieu à une solution unique lorsqu'on fixe la liste des exigences de rationalité. Il s'agit d'une opération simple qui rend compte de manière univoque de la phase cumulative de notre acquisition de connaissances. C'est une opération monotone en ce sens que rien de ce qui est acquis n'est plus remis en cause.

Les opérations de révision et de contraction par contre, liées entre elles comme nous l'avons vu, sont beaucoup plus complexes. Elles permettent de tenir compte d'éventuels reculs du savoir, par exemple lorsqu'une contradiction apparaît à la suite d'une tentative d'intégrer une information non plausible.

Pour ces opérations non-monotones il n'y a pas de modèle unique. Les exigences de rationalité ne déterminent pas entièrement la dynamique possible. D'autres considérations sont nécessaires et varient de cas en cas. Parmi les exemples de critères supplémentaires proposés on peut citer la notion de sous-ensemble de croyances maximal, ou d'une relation d'ordre épistémique, décrivant l'importance des éléments du savoir pour un individu.

Les considérations autour de la dynamique du savoir ont eu pour base de discussion la notion d'ensemble de croyances. L'une des caractéristiques de cette structure est sa fermeture par rapport à la déduction, c'est-à-dire le fait qu'elle contienne toutes ses conséquences. La déduction est considérée ici comme classique. Cela se manifeste essentiellement par la propriété que la présence d'une contradiction entraine l'explosion de la théorie: toute phrase devient déductible.

La fermeture par rapport à une relation de déduction aussi forte n'est probablement pas une exigence réaliste. Dans les développements récents, on voit donc apparaître de plus en plus de formes attenuées de cette exigence. Des logiques non-classiques ont été proposées, comme la logique partielle [1], ou la logique paraconsistante [5] qui sont des logiques non-explosives.

Cette manière de faire permet de concevoir une théorie temporairement contradictoire, laquelle ne soit pas rejetée en bloc, mais de laquelle soient retirées l'une après l'autre, toute les contradictions par une opération de contraction.

De cette façon, le comportement dynamique reflété par les opérations d'expansion, de révision et de contraction représente bien un aspect de l'évolution du savoir concret.

Les développements actuels dans ce domaine vont vers une vision plus réaliste de la révision du savoir [6]. Ce réalisme est obtenu en grande partie grâce à l'utilisation de logiques non-classiques, et en particulier les logiques non-monotones. Le prix à payer est l'abandon de certaines propriétés de la logique, comme le modus ponens, qui semblent faire partie jusqu'à présent des outils déductifs de tout scientifique.

Mais la perspective de pouvoir considérer des théories temporairement contradictoires dans lesquelles on puisse localiser et finalement éliminer les contradictions, vaut peut-être bien la peine de sacrifier quelques habitudes, aussi agréables soient-elles.

References

[1] S. Blamey. "Partial Logic". In Gabbay and Günthner, ed., *Handbook of Philosophical Logic*, volume 3. Reidel, Dordrecht, 1986.

[2] P. Gärdenfors. *Knowledge in flux*. MIT Press, Cambridge, 1988.

[3] J. Halpern, Y. Moses. "Towards a theory of knowledge and ignorance". In K.Apt ed., *Logic and Models of Concurrent Systems*. Springer Verlag, Berlin 1985.

[4] D. Makinson. "How to give it up: A survey of some formal aspects of the logic of theory change". *Synthese* 62 (1985), 347-363.

[5] G. Priest. *In Contradiction*. Nijhoff, Dordrecht 1987.

[6] G. Restall, J. Slaney. *Realistic belief revision*. Preprint, 1995.

[7] R. Stalnaker. "Probability and conditionals". *Philosophy of science* 37 (1970), 64-80.