

Août 2004

Numéro 37

# Cahiers de l'IMA

Un modèle multi-agents d'action collective

**Laurent Salzarulo**

Institut de Mathématiques Appliquées  
Faculté des S.S.P.  
Université de Lausanne  
BFSH 2  
1015 Lausanne

# Un modèle multi-agents d'action collective

Laurent Salzarulo

## Résumé

Ce document présente une généralisation d'un modèle simple d'action collective proposé en 1978 par M. Granovetter [2]. Implémenté sous la forme d'un système multi-agents sur une grille carrée, le modèle est notamment rendu spatial et est ensuite utilisé pour étudier la dynamique collective dans diverses situations expérimentales.

## 1 Introduction

Dans un article publié en 1978 [2], Mark Granovetter présente un modèle de comportement collectif permettant d'étudier les effets du processus d'imitation. Dans ce modèle, des agents sont confrontés à un choix binaire : s'engager dans une certaine action ou ne pas s'y engager (typiquement participer à une bagarre dans une manifestation). À chaque pas de temps, chaque agent décide de s'engager dans l'action si le nombre total d'agents qui y sont déjà engagés est supérieur ou égal à un certain seuil qui lui est attribué au début de la simulation. L'engagement d'un agent dans l'action va donc éventuellement y entraîner un autre agent si son propre seuil d'action est atteint. Ce processus capture le phénomène d'imitation : un agent imite ses congénères dès qu'ils sont suffisamment nombreux à faire la même chose. S'il paraît simple, ce phénomène est pourtant assez répandu lorsque, dans une situation particulière, nouvelle ou extraordinaire, il n'y a pas de norme sociale claire préétablie (immersion dans une culture étrangère, situation de foule ou de panique, ...).

En distribuant les seuils d'action selon une loi normale de moyenne fixée, Granovetter étudie le nombre moyen d'agents actifs lorsque la situation s'est stabilisée en fonction de l'écart-type de la distribution des seuils. Il en conclut notamment qu'autour d'une certaine valeur critique, le nombre d'agents actifs varie très fortement en fonction de l'écart-type, et qu'il est donc possible, pour le même modèle et la même situation initiale, d'observer deux situations finales qualitativement sans rapport l'une avec l'autre (5% ou 100% d'agents actifs pour une variation de moins de 4% de l'écart-type).

Le modèle de Granovetter souffre de trois défauts lorsque l'on désire l'interpréter. Premièrement, ses agents possèdent une connaissance immédiate et exacte du nombre total d'agents actifs dans la population, alors que l'on

pourrait s'attendre, dans une situation plus réaliste, à une information locale et non précise. Deuxièmement, la conclusion de Granovetter est basée sur l'hypothèse très forte de la distribution des seuils d'action dans la population. Enfin, les agents ont la possibilité de devenir actifs, mais pas l'inverse. Le modèle ne décrit donc au mieux que la genèse d'un comportement collectif, mais ne permet pas leur étude sur des intervalles de temps plus importants. Un modèle tenant compte de l'espace et permettant l'étude de la dynamique du phénomène collectif a été présenté par Jager et al. [3]. Il permet de plus de tenir compte de la mobilité des agents, ce que nous ne ferons pas ici.

Nous allons commencer par la simulation du modèle de Granovetter tel qu'il le décrit. Nous étudierons ensuite les effets d'un changement de la distribution des seuils d'action, et de la restriction de l'information de chaque agent à son voisinage immédiat. Puis nous utiliserons le modèle développé comme un laboratoire social, afin d'y faire quelques expériences.

Il ne s'agit pas de trouver un modèle réaliste de l'être humain, mais de mettre en évidence un ensemble d'interactions élémentaires, non coordonnées, suffisant à générer un phénomène collectif d'intérêt. L'objectif est de montrer que d'une connaissance partielle de son entourage et d'une action locale peut émerger un comportement collectif complexe, qui nous semble organisé, ou que l'on a envie d'interpréter.

Le système étudié ici est une population de 2500 agents dont chacun occupe un noeud d'une grille carrée de  $50 \times 50$  cellules. Les conditions aux bords de la grille sont périodiques. Autrement dit, tout se passe comme si les agents « vivaient » sur un tore.

## 2 Le modèle de Granovetter

### 2.1 Le modèle de Granovetter

Dans un premier temps, nous allons simuler le système décrit par Granovetter. Au début de la simulation, on attribue à chaque agent un seuil d'action, distribué dans la population selon une loi normale de moyenne  $\mu = 0.25$  et d'écart-type  $\sigma \in [0; 1]$  (les seuils  $< 0$  ou  $> 1$  sont ramenés respectivement à ces deux bornes). Les agents sont tous inactifs au départ. À chaque itération, la proportion d'agents actifs dans la population  $r(t)$  est calculée. Les agents comparent leurs seuils d'action à la proportion de la population active simultanément, et leur état d'activité est changé en conséquence. Une sorte d'avalanche apparaît, alors que les agents qui viennent d'être activés entraînent éventuellement de nouveaux agents dont le seuil viendrait d'être atteint. Le processus continue jusqu'à un stade où aucun nouvel agent ne devient actif. On mesure alors la proportion d'agents actifs à l'équilibre  $r_e = r(t \rightarrow \infty)$ . L'expérience est répétée afin d'estimer la moyenne de  $r_e$  en fonction de  $\sigma$ . Granovetter observe que lorsque  $\sigma$  augmente, cette proportion est initialement faible (env. 5%), puis saute brusquement à presque

100% lorsque  $\sigma \simeq 0.122$ . Les résultats des simulations numériques sont présentés dans les figures 1 et 2. Ils confirment les observations de Granovetter.

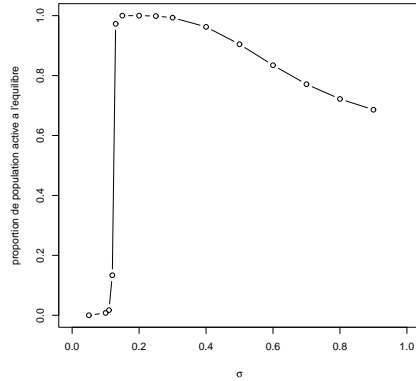


FIG. 1 – Proportion de la population active ( $\bar{r}_e$ ) en fonction de  $\sigma$ . Les seuils d'actions sont distribués selon une loi normale de moyenne  $\mu = 0.25$  et d'écart-type  $\sigma$ . Chaque point est une moyenne sur 1000 événements.

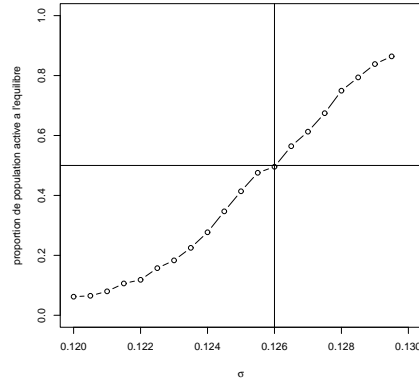


FIG. 2 – Agrandissement de la figure 1 pour  $0.12 \leq \sigma \leq 0.13$ . Droite horizontale à  $r = 1/2$ .

Ce comportement surprenant s'explique si l'on représente graphiquement les seuils  $s$  et leur fonction de répartition  $F(s)$  (fig. 3). L'axe des abscisses peut être vu à la fois comme un seuil ( $s$ ) et comme une proportion de la population ( $r$ ). La proportion moyenne de population active peut être représentée par un point sur ce graphe à chaque étape de la dynamique du système. Considérons par exemple la courbe correspondant à  $\sigma = 0.118$  (courbe en trait fin). Nous avons au départ  $r(t = 0) = 0$ . Les agents qui deviennent actifs pour  $t = 1$  sont ceux dont les seuils sont inférieurs ou égaux à la proportion d'agents actifs à  $t = 0$ . Leur fréquence relative  $r(1)$  est donc donnée par  $F(r(0))$ . Lors de chaque itération, on a  $r(t + 1) = F(r(t))$ . Graphiquement, on monte verticalement depuis l'abscisse  $r(t)$  pour atteindre  $F(r(t))$ , puis on se déplace horizontalement jusqu'à atteindre la droite représentant les seuils (l'abscisse est alors  $r(t + 1)$ ), on rejoint à nouveau verticalement la courbe de la fonction de répartition des seuils, etc. Pour  $\sigma = 0.118$ , il est clair qu'en partant de  $r(0) = 0$ , le processus converge vers le premier point où les deux courbes se coupent, qui satisfait  $F(r) = r$ . Lorsque  $\sigma$  augmente (courbe en trait tillé), la fonction de répartition change de forme et cesse de couper la courbe des seuils (excepté bien sûr au point d'abscisse  $s = 1$ ). Le système converge alors vers  $r = 1$ . Autrement dit, la population entière est active après un nombre d'itérations suffisamment important.

Cette explication, naturelle du point de vue mathématique, n'a pourtant pas d'interprétation sociologique. C'est la coïncidence fortuite de certains états

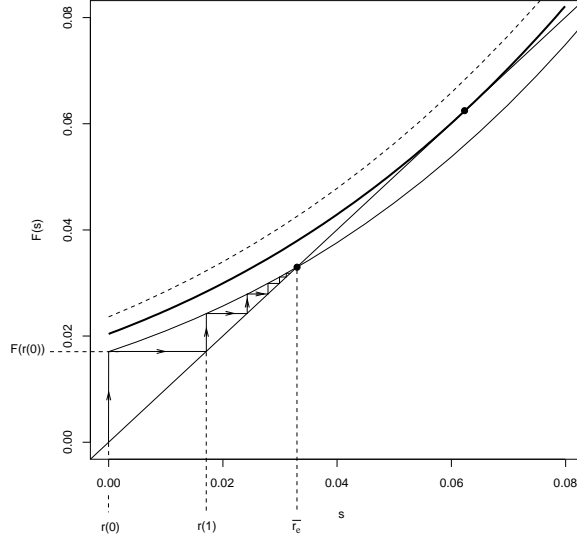


FIG. 3 – Fonctions de répartition des seuils d'activité distribués selon une loi normale de moyenne  $\mu = 0.25$  et d'écart-type  $\sigma = 0.118$  (courbe en trait fin),  $\sigma = \sigma_c$  (courbe en trait gras) et  $\sigma = 0.126$  (courbe en trait tillé).

dans la population qui détermine l'ampleur du comportement collectif, sans que les agents ne se soient concertés ou soient conscient de l'effet de la présence simultanée de ces états.

La valeur de  $\sigma$  qui est telle que la fonction de répartition des seuils soit tangente à la courbe des seuils (courbe en trait gras) peut être défini comme la valeur critique  $\sigma_c$  pour laquelle le système diverge. Granovetter estime cette valeur à  $\sigma_c \simeq 0.122$ . Il est possible d'obtenir une équation transcendante pour cette valeur et de l'estimer précisément. En effet, l'équation de la fonction de répartition des seuils est donnée par

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^s \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{s-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right) \quad (2)$$

où  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$  (« error function »). Lorsque les deux courbes sont tangentes, le point de contact est tel que  $F(s) = s$ . D'autre part, la dérivée de la fonction de répartition des seuils (c'est-à-dire la distribution elle-même) vaut 1 en ce point :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (3)$$

$$s = \mu \pm \sigma \sqrt{-2 \ln(\sqrt{2\pi}\sigma)}. \quad (4)$$

Ces solutions ne sont réelles que si  $\sigma \leq 1/\sqrt{2\pi}$ . Pour des valeurs supérieures de  $\sigma$ , la pente de la fonction de répartition est en effet toujours inférieure à 1. La valeur de  $s$  qui nous intéresse est la solution qui se trouve à gauche de la moyenne, et qui correspond au signe '-' de l'équation (4). En substituant cette valeur dans l'équation  $F(s) = s$ , on obtient

$$\operatorname{erf}\left(-\sqrt{-\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma_c\right)}\right) = 2\mu - 1 - 2\sqrt{2}\sigma_c\sqrt{-\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma_c\right)}. \quad (5)$$

Il est sans doute impossible de résoudre analytiquement (5), mais pour  $\mu = 0.25$ , une résolution numérique donne bien  $\sigma_c \simeq 0.122221$ , en accord avec la valeur estimée par Granovetter. Curieusement, la valeur de  $\sigma_c$  que l'on obtient à partir des simulations en cherchant la valeur à laquelle la moitié de la population est active est plutôt de 0.126 (fig. 2). Ainsi, ces deux manières de définir  $\sigma_c$  ne sont pas équivalentes. L'équation obtenue en (5) permet d'étudier le comportement de  $\sigma_c$  en fonction de  $\mu$ . Les résultats d'une résolution numérique sont donnés dans la figure 4. Ils montrent que  $\sigma_c$  n'existe

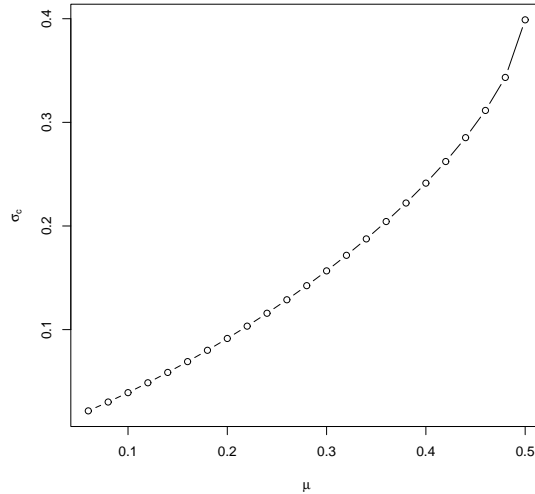


FIG. 4 –  $\sigma_c$  en fonction de  $\mu$ .

que pour  $0.05 \lesssim \mu \lesssim 0.52$  et diverge pour  $\mu \simeq 0.52$ . Dans cet intervalle,  $\sigma_c$  augmente de 0.015 à 0.4 environ. Ceci signifie que plus le seuil moyen de la population est élevé, plus l'écart-type de la distribution correspondante doit être grand pour que se produise le phénomène décrit par Granovetter. Une population dont les agents présentent des seuils bas mais concentrés autour de la moyenne se comportera qualitativement de la même manière

qu'une population dont les agents ont un seuil moyen élevé et des valeurs bien réparties entre 0 et 1.

La distribution de la fréquence des avalanches en fonction de leur taille (c'est-à-dire du nombre d'agents actifs à l'équilibre) est représentée sur la figure 5 pour  $\sigma = \sigma_c$ . Elle est fortement bimodale, et nous montre qu'il y a

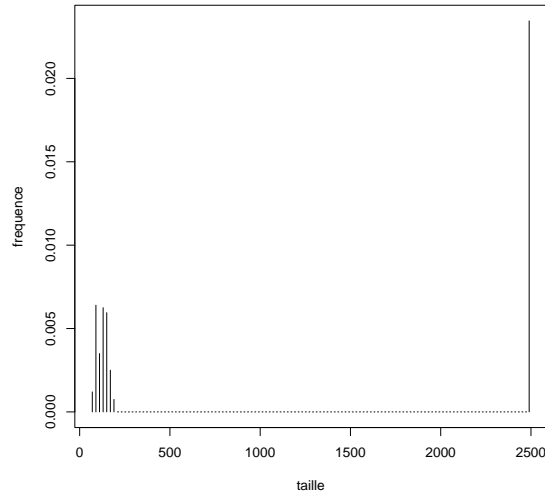


FIG. 5 – Distribution de la taille des avalanches pour des seuils distribués selon une loi normale de moyenne  $\mu = 0.25$  et d'écart-type  $\sigma = 0.126$ , calculée sur 1000 événements.

essentiellement deux histoires possibles pour la population : soit l'avalanche reste relativement petite (de l'ordre de 100 agents actifs), soit elle concerne toute la population. Il n'y a pas d'événements intermédiaires. Le comportement moyen déterministe voudrait que pour  $\sigma < \sigma_c$  les avalanches soient toutes d'une certaine taille relativement petite, et qu'elles atteignent toute la population dans le cas contraire. Des accidents statistiques font naturellement que les deux scénarii restent possibles dans les deux cas.

De manière générale, la conclusion de Granovetter s'applique : pour deux populations statistiquement identiques agissant de la même manière, les états finaux observés peuvent différer radicalement. Il n'y a donc pas de comportement moyen ou de comportement typique pour ce système. Ce résultat s'appuie pourtant sur une hypothèse assez forte, selon laquelle les seuils sont distribués normalement dans la population. Voyons ce qui se passe lorsque cette distribution est changée.

## 2.2 Distribution uniforme des seuils d'action

Pour étudier plus systématiquement les effets de la distribution des seuils d'action sur la dynamique du système, nous commencerons par une distribution uniforme, particulièrement simple du point de vue mathématique. Les expériences sont donc conduites dans les mêmes conditions que précédemment, à l'exception que les seuils d'actions sont distribués uniformément entre 0 et 1. Comme les seuils sont ici tous strictement positifs, il faut, au départ de la simulation, forcer l'un des agents à l'activité pour déclencher le processus.

La distribution des avalanches en fonction de leur taille est représentée sur la figure 6. Nous observons une distribution très bien approchée par une

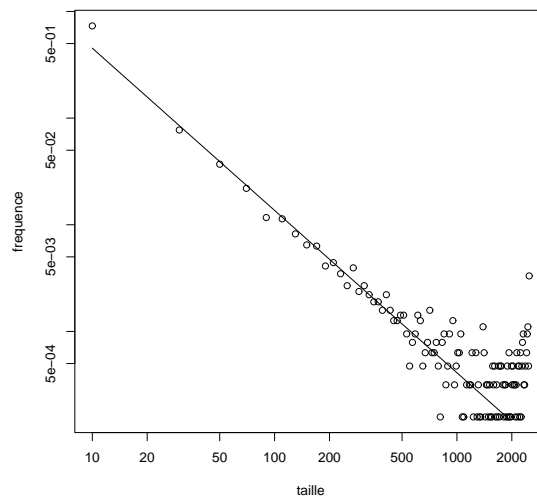


FIG. 6 – Fréquence des avalanches en fonction de leur taille pour une distribution uniforme des seuils d'action entre 0 et 1. La distribution est calculée sur 10'000 observations. Droite de régression (sur les points d'abscisse 1 à 800) :  $\ln(P(T)) = -2.71 - 1.52 \ln(T)$ ,  $R^2 = 0.97$ .

loi de puissance, typique des modèles à seuils. En notant  $P(T)$  la probabilité d'apparition d'une avalanche de taille  $T$  et en posant

$$P(T) \propto T^{-\alpha}, \quad (6)$$

on estime  $\alpha = 1.52$  par régression linéaire. La loi de puissance est une distribution très fréquemment observée en physique, dans la nature et dans les sciences sociales. Les probabilités d'apparition d'un tremblement de terre, d'une avalanche (de neige...), d'un feu de forêt ou même d'un conflit humain sont toutes des fonctions en loi de puissance de leur magnitude [4]. Ces systèmes sont souvent qualifiés de critiques, dans le sens où la taille moyenne



d'un évènement est infinie (si  $\alpha < 2$ , ce qui est le cas ici). Autrement dit, il n'est jamais possible d'exclure la possibilité d'un évènement d'amplitude arbitrairement grande. Dans ces systèmes, la longueur ou la durée des évènements sont aussi distribués selon une loi en puissance. Dans notre cas, on peut mesurer la longueur  $L$  d'une avalanche comme le nombre d'itération nécessaires à atteindre l'équilibre. La longueur d'une avalanche est une loi de puissance de sa taille (fig. 7). En écrivant

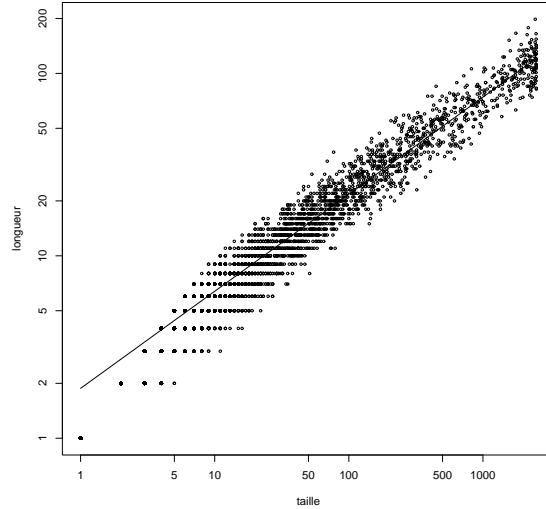


FIG. 7 – Longueur des avalanches en fonction de leur taille. 10'000 évènements sont représentés sur le graphique. Une régression linéaire sur les évènements dont la taille est supérieure à 20 donne  $\ln(L) = 0.63 + 0.53 \ln(T)$ , avec  $R^2 = 0.92$ .

$$L \propto T^\gamma, \quad (7)$$

on obtient  $\gamma = 0.53$  par régression linéaire. Ainsi, la longueur et la taille des avalanches sont liées, ce qui indique de plus que la fréquence des avalanches en fonction de leur longueur est aussi une loi de puissance. Les exposants de ces trois lois de puissance ne sont pas indépendants. En effet, comme une avalanche est caractérisée soit par sa taille, soit par sa longueur, nous pouvons écrire

$$P(L)dL = P(T)dT, \quad (8)$$

d'où

$$P(L) = P(T(L)) \frac{dT}{dL}. \quad (9)$$

En insérant les expressions correspondantes dans l'équation ci-dessus, il vient

$$L^{-\beta} \propto \left(L^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{-\alpha} L^{\frac{1}{\gamma}-1}, \quad (10)$$

ce qui nous donne finalement

$$\beta = \frac{1}{\gamma}(\alpha - 1) + 1. \quad (11)$$

Numériquement, nous avons estimé  $\alpha = 1.52$  et  $\gamma = 0.53$ , ce qui conduit à  $\beta = 1.98$ . Par régression linéaire sur la distribution de la longueur des avalanches, on estime en revanche  $\hat{\beta} = 1.71$  ( $R^2 = 0.95$ ). D'après l'allure des graphes correspondants et les coefficients de détermination multiple, l'erreur la plus vraisemblable se situe au niveau de la mesure de  $\gamma$ .

Pour une distribution uniforme des seuils d'actions, nous devrions observer que la taille et la longueur moyennes des avalanches sont infinies. Cependant ce n'est pas le cas, puisque le système étudié ne comporte que 2500 agents et n'autorise au maximum que des avalanches de cette taille.

En faisant apparaître la distribution uniforme comme un cas particulier d'une classe de distributions, nous verrons dans le prochain paragraphe que cette situation correspond bien à un état critique du système.

### 2.3 Distribution linéaire des seuils d'action

Afin de tester la robustesse des conclusions précédentes face au choix de la distribution des seuils, une distribution linéaire a aussi été simulée. Selon cette loi, la densité de probabilité pour un seuil  $s$  vaut  $P(s) = 1 - \frac{b}{2} + bs$ , où  $b$  est un paramètre de la distribution ( $-2 \leq b \leq 2$ ). La distribution uniforme est obtenue avec  $b = 0$ . La figure 8 montre la proportion d'agents actifs à l'équilibre en fonction de la pente  $b$  de la distribution, ainsi que les distributions de la taille des avalanches pour trois valeurs particulières de  $b$  ( $b = -1.5$ ,  $b = 0$  et  $b = 1.5$ ). Lorsque  $b < 0$ , il y a dans la population beaucoup d'agents à bas seuil et peu d'agents à haut seuil. Dans ce cas, la taille moyenne des avalanches est grande, et la distribution des avalanches est fortement bimodale (fig. 8, en bas à gauche). Inversement, lorsque  $b > 0$ , la population se compose de beaucoup d'agents à haut seuil et de peu d'agents à bas seuil. Les avalanches sont donc difficiles à déclencher, et leur taille moyenne reste très petite. La distribution de la taille des avalanches associée décroît plus rapidement qu'une loi de puissance d'exposant  $-3.8$ . La situation  $b = 0$  correspond bien à un cas limite entre ces deux comportements, où la taille des avalanches fluctue fortement pour parfois atteindre la population toute entière.

### 2.4 Comportement moyen du système

Nous l'avons vu dans le paragraphe 2.1, la taille moyenne des avalanches peut s'expliquer en comparant la fonction de répartition des seuils avec la fonction identité. Le même raisonnement s'applique par exemple à une distribution linéaire des seuils. La figure 9 représente les fonctions de répartition

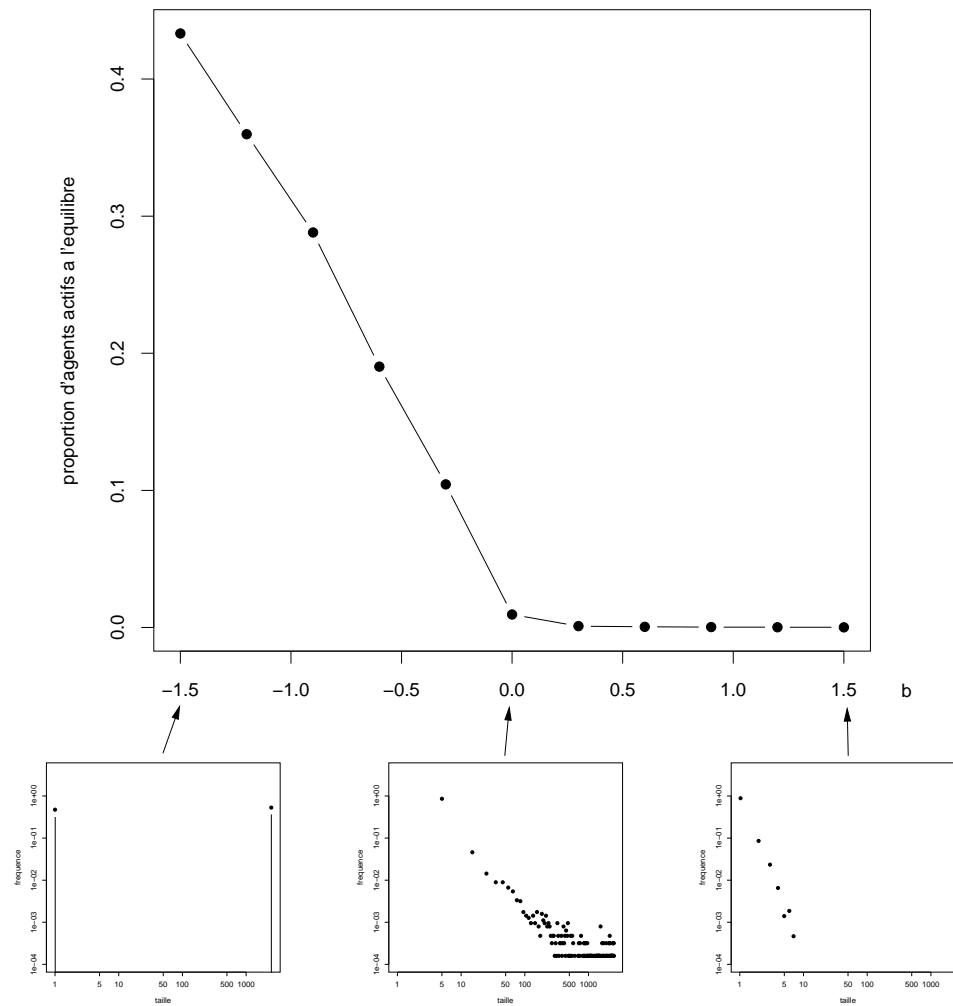


FIG. 8 – En haut : proportion d’agents actifs en fonction de la pente  $b$  de la distribution linéaire des seuils. En bas (de gauche à droite), distribution de la taille des avalanches lorsque  $b = -1.5$ ,  $b = 0$  (distribution uniforme des seuils) et  $b = 1.5$  respectivement.

des seuils pour des distributions linéaires de paramètres  $b < 0$ ,  $b = 0$ ,  $b > 0$ . Les avalanches sont déclenchées par l'activation d'un agent, ce qui corres-

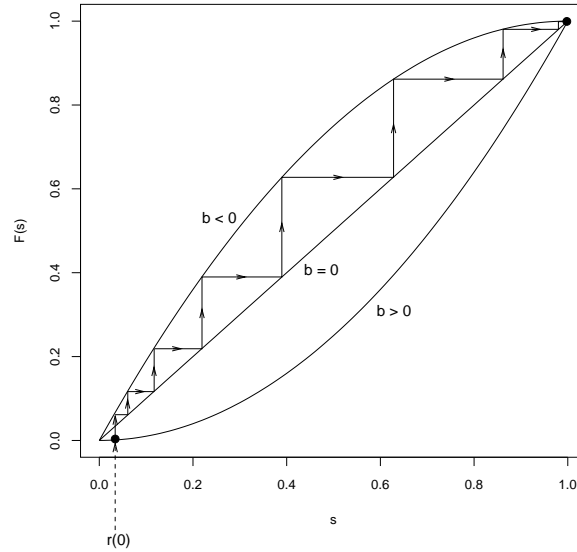


FIG. 9 – Fonctions de répartition des seuils d'actions correspondant à des distributions linéaires de pente  $b < 0$ ,  $b = 0$  et  $b > 0$ .

pond à une proportion  $r(0) = 1/n$  d'agents actifs dans la population. Lorsque  $b < 0$ , les itérations se poursuivent et convergent vers le point d'abscisse  $s = 1$ . Les avalanches atteignent en moyenne toute la population. Lorsque  $b > 0$ , en revanche, le processus s'arrête immédiatement, et la taille moyenne correspondante des avalanches vaut  $\bar{r}_e = 1/n$ . Lorsque  $b = 0$  enfin, les courbes associées à la fonction de répartition et la fonction identité sont tangente, de sorte que le processus exact dépend fortement des fluctuations statistiques de la distribution des seuils dans la population. L'expérience nous montre que les fluctuations de la taille des avalanches sont en effet très grandes, ou, en d'autres termes, qu'il n'y a pas d'avalanches typiques dans le système.

De manière générale, le phénomène décrit par Granovetter s'observe dès lors que la fonction de répartition des seuils est supérieur ou égale à la fonction identité sur un certain intervalle et tangente à cette fonction en au moins un point dans l'intervalle.

## 2.5 Solution exacte du modèle

Pour terminer la description de ce modèle, en voici une solution exacte. Il vient naturellement à l'idée de caractériser l'état du système par le nombre d'agents actifs. Cependant, les probabilités de transition d'un état à un autre dépendent du temps (i.e. de l'itération) de manière non linéaire et interdisent

toute approche markovienne ou en termes d'équation maîtresse. Une possibilité pour calculer la probabilité  $P(T)$  d'apparition d'une avalanche de taille  $T$  dans une population de taille  $n$  est de prendre en compte l'ensemble des « histoires » conduisant à l'état considéré. Prenons comme exemple l'avalanche de taille 12 telle que 4 agents deviennent actifs à la première itération, 3 agents à la deuxième et 5 à la troisième itération. Lors des itérations successives, plus aucun agent ne devient actif, puisque l'avalanche est de taille 12. Pour que les 4 premiers agents deviennent actifs, il faut que leur seuil soit inférieur ou égal à 0, ce qui se produit avec probabilité  $F(s=0)^4$  (où  $F(s)$  est la fonction de répartition des seuils). À la seconde itération, ces quatre agents provoquent l'activation de trois nouveaux agents. Leurs seuils sont strictement supérieurs à 0 et inférieurs à  $4/n$ . Ils ne peuvent être ni plus bas (les agents se seraient alors activés à la première itération), ni plus haut (ils ne seraient pas devenus actifs à la deuxième itération). La probabilité que 3 agents s'activent à la deuxième itération vaut donc  $[F(4/n) - F(0)]^3$ . Enfin, les seuils des 5 agents qui deviennent actifs à la troisième itération doivent être compris entre  $4/n$  et  $7/n$ , ce qui se produit avec probabilité  $[F(7/n) - F(4/n)]^5$ . Les  $n - 12$  agents restant doivent avoir un seuil strictement supérieur à  $12/n$ , événement dont la probabilité vaut  $[1 - F(12/n)]^{n-12}$ . La probabilité qu'une avalanche de taille 12 et de longueur 3 ait lieu vaut donc

$$(n; 4, 3, 5, n - 12)F(0)^4 \left[1 - F\left(\frac{12}{n}\right)\right]^{n-12} \left[F\left(\frac{4}{n}\right) - F(0)\right]^3 \cdot \left[F\left(\frac{7}{n}\right) - F\left(\frac{4}{n}\right)\right]^5, \quad (12)$$

où  $(n; 4, 3, 5, n - 12)$  est un coefficient multinomial qui permet de tenir compte de l'ordre dans lequel les différents groupes d'agents sont répartis dans la population. Il y a plusieurs manières possibles d'obtenir une avalanche de taille 12. Notons  $n_1, \dots, n_\ell$  le nombre d'agents activés à l'itération  $i = 1, \dots, \ell$ , où  $\ell$  est la longueur de l'avalanche. Pour l'exemple précédent,  $\ell = 3$ ,  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 3$  et  $n_3 = 5$ . L'ensemble des avalanches de taille 12 est donné par l'ensemble des  $(n_i)_{i=1}^\ell$  tels que  $n_i \neq 0$  et  $\sum_{i=1}^\ell n_i = 12$ . Posons de plus  $n_0 = 0$  et notons  $N_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^j n_k$ ,  $j = 0, \dots, \ell$ . La probabilité qu'une avalanche de taille 12 (et de longueur quelconque) se produise vaut

$$P(12) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}^* \\ \text{t.q.} \\ n_1 + \dots + n_\ell = 12}} (n; n_1, \dots, n_\ell, n - 12)F(N_0)^{n_1} [1 - F(N_\ell)]^{n-12} \cdot \prod_{j=0}^{\ell-2} [F(N_{j+1}) - F(N_j)]^{n_{j+2}}, \quad (13)$$

où l'on omettra simplement le produit lorsque  $\ell = 1$ . Pour  $T$  quelconque, on a finalement

$$P(T) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}^* \\ \text{t.q.} \\ n_1 + \dots + n_\ell = T}} (n; n_1, \dots, n_\ell, n - T) F(N_0)^{n_1} [1 - F(N_\ell)]^{n-T} \cdot \prod_{j=0}^{\ell-2} [F(N_{j+1}) - F(N_j)]^{n_{j+2}}. \quad (14)$$

Pour de grandes avalanches, cette formule est très coûteuse en temps de calcul, puisqu'il s'agit de parcourir l'ensemble des partitions possibles de la tailles des avalanches. Néanmoins le calcul reste possible pour des population et des avalanches de taille respectables, comme le montre l'exemple suivant.

**Cas particulier : la distribution uniforme** Dans le cas d'une distribution uniforme des seuils d'action, on peut écrire  $F(N_j) = \frac{j+1}{n+1}$ , de sorte que  $F(N_{j+1}) - F(N_j) = \frac{n_j}{n+1}$ . En notant  $p = \frac{1}{n+1}$ , la formule (14) devient

$$P(T) = p^T [(n - T)p]^{n-T} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}^* \\ \text{t.q.} \\ n_1 + \dots + n_\ell = T}} (n; n_1, \dots, n_\ell, n - T) \prod_{j=0}^{\ell-1} n_j^{n_{j+1}}. \quad (15)$$

Un petit exemple sur une population de taille 49 est présenté dans la figure 10. Elle montre que la courbe de probabilité obtenue par la formule (15) s'ajuste remarquablement bien aux résultats des simulations. Il serait intéressant de pouvoir montrer à partir de cette formule que la fréquence d'apparition des avalanches est effectivement en loi de puissance de leur taille dans de grandes populations.

### 3 Une version spatialisée du modèle

Jusqu'ici, nous avons fait l'hypothèse que les agents avaient une information exacte de l'état de l'ensemble de la population. Pour un modèle moins caricatural, il semble naturel de faire l'hypothèse que les agents ne « voient » que ce qui se passe dans leur entourage proche. La notion de voisinage que nous allons utiliser est celle de voisinage de Moore, couramment utilisée dans l'étude des automates cellulaires. C'est le carré qui contient toutes les cellules dont les distances horizontale et verticale à la cellule considérée sont inférieures à une certaine valeur fixée, appelée rayon du voisinage. Par exemple, le voisinage de Moore de rayon 1 d'une cellule est un carré de trois cellules d'arête, centré sur la cellule considérée, qui contient ses huit voisins les plus proches. Nous introduisons donc ici un nouveau paramètre, le rayon du voisinage de Moore, qui caractérise la portée de la vision des agents. Seule la

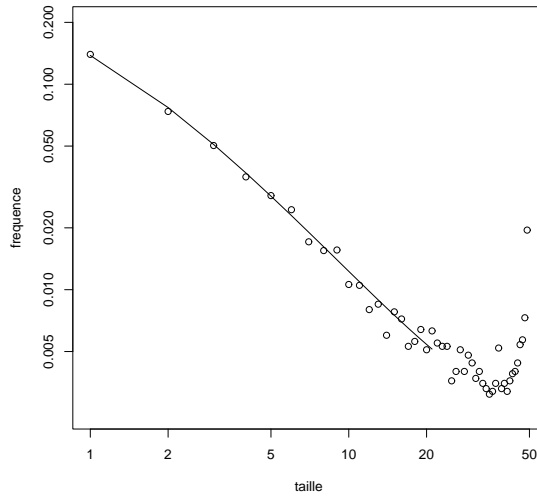


FIG. 10 – Fréquence des avalanches en fonction de leur taille dans une population de taille 49. Distribution obtenue par simulation de 10'000 événements (cercles) et distribution théorique (ligne).

proportion d'agents actifs de son voisinage est désormais accessible à chaque agent ; c'est donc à cette proportion que son seuil d'action sera comparé pour la prise de décision.

### 3.1 Distribution normale des seuils d'actions

Essayons d'abord de simuler le modèle original de Granovetter dans ce nouveau contexte. Les seuils d'actions sont distribués selon une loi normale de moyenne  $\mu = 0.25$  et d'écart-type  $\sigma$  variable. Pour  $\sigma$  suffisamment grand, comme pour la version non locale du modèle, on s'attend à ce qu'une grande partie de la population soit active à l'équilibre. La situation finale n'est pas différente, mais la dynamique l'est. Examinons par exemple le « paysage » obtenu après quatre itérations dans les versions non locale et locale du modèle (resp. fig. 11 et 12). Alors que dans le cas non local, les agents actifs sont parsemés sur la grille sans ordre apparent, l'activité se répand à partir de petits groupes dans le cas local. Elle naît autour d'agents ou de petits groupes d'agents ayant des seuils très bas et entraînant leurs voisins. Macroscopiquement, la population semble s'être organisée en groupes. Ces groupes n'ont pourtant pas été créés ou décidés à l'avance. Ils émergent spontanément de cette situation. Ils ne sont même pas décidés par les agents puisque, d'une part, ils n'en ont pas la capacité (leur règle d'activité ne contient pas le concept de groupe) et, d'autre part, il ne « savent » pas s'ils sont dans un

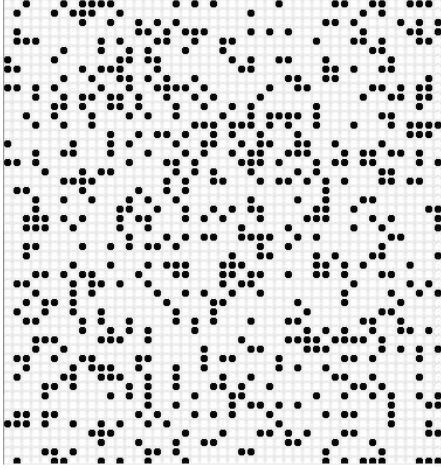


FIG. 11 – Agents actifs (en noir) et inactifs (en blanc) après quatre itérations. Les seuils d'action sont distribués selon une loi normale de moyenne  $\mu = 0.25$  et d'écart-type  $\sigma = 0.15$ . Le voisinage est infini.

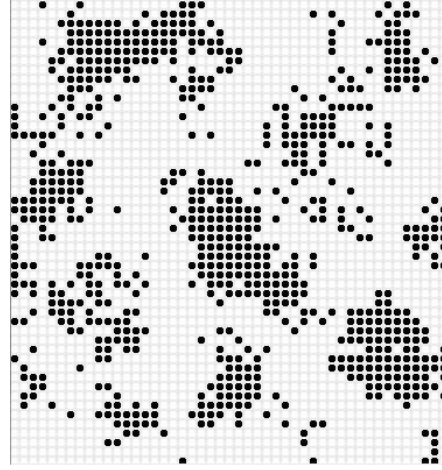


FIG. 12 – Agents actifs (en noir) et inactifs (en blanc) après quatre itérations. Les seuils d'action sont distribués selon une loi normale de moyenne  $\mu = 0.25$  et d'écart-type  $\sigma = 0.15$ . Le voisinage est un voisinage de Moore de rayon  $r = 2$ .

groupe ou non, étant donné que leur vision se limite à leur entourage proche.

Quantitativement, le fait que la vision des agents soit limitée à leur entourage proche ne change pas la situation à l'équilibre. La distribution de la taille des avalanches (fig. 13) reste fortement bimodale autour d'une valeur critique de  $\sigma$  qui dépend de la taille du voisinage. Pour  $\sigma \simeq \sigma_c$ , deux populations statistiquement identiques peuvent donner lieu à des avalanches relativement localisées, ou au contraire atteignant toute la population, comme dans le cas non localisé. La valeur  $\sigma_c$  à laquelle la taille des avalanches diverge diminue avec le rayon du voisinage, elle est estimée à  $\sigma \simeq 0.114$  dans le cas  $r = 5$  (fig. 14).

### 3.2 Distribution uniforme des seuils d'action

Nous avons vu que le fait de restreindre la vision des agents à leur voisinage immédiat ne change pas qualitativement le comportement de la population lorsque les seuils d'action sont distribués normalement dans la population. Pour une distribution uniforme des seuils, le modèle non localisé montrait un comportement rappelant un état critique. Voyons comment il évolue en voisinage fini.

La manière dont l'activité se répand dans la population change par rapport à la version non locale. Rappelons que, puisque les seuils d'action sont



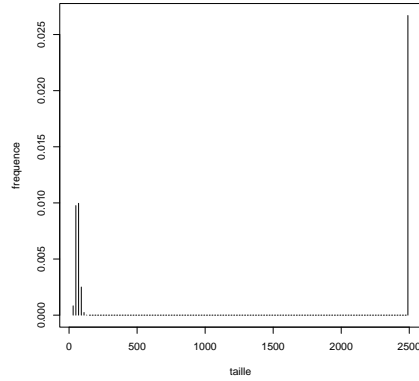


FIG. 13 – Distribution de la taille des avalanches lorsque la vision des agents est limitée à un voisinage de Moore de rayon  $r = 5$ . Les seuils d'action sont distribués selon une loi normale de moyenne  $\mu = 0.25$  et d'écart-type  $\sigma = 0.115$ . La distribution est calculée sur 10'000 événements.

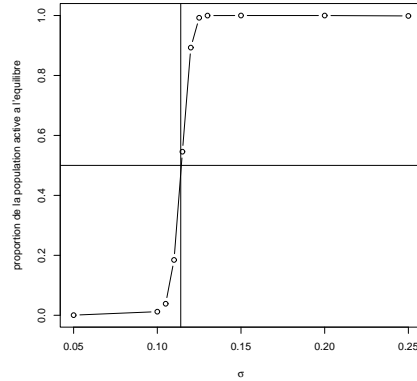


FIG. 14 – Proportion de la population active en fonction de  $\sigma$  lorsque la vision des agents est limitée à un voisinage de Moore de rayon  $r = 5$ . Les seuils d'action sont distribués selon une loi normale de moyenne  $\mu = 0.25$  et d'écart-type  $\sigma$ . Chaque point est une moyenne sur 10'000 événements.

tous strictement positifs, un agents est forcé à l'activité au début de la simulation. Alors que dans le cas non local, l'activité apparaît aléatoirement dans la population, elle prend ici naissance sous la forme d'un groupe s'étendant autour du premier agent activé.

La figure 15 montre que la distribution de la taille des avalanches n'est plus approximée correctement par une loi de puissance pour des petites valeurs de  $r$ . Le comportement « critique » disparaît lorsque le voisinage est de petite taille. Le système se laisse alors décrire en termes de comportement moyen, dans le sens où la taille moyenne des avalanches est bien définie, et où il est moins vraisemblable d'obtenir dans deux populations statistiquement identiques des comportements totalement différents.

La relation entre la durée des avalanches et leur taille est cependant conservée, ainsi que la valeur de  $\gamma$  ( $\simeq 0.5$ ) (fig. 16).

### 3.3 Distribution linéaire des seuils d'action

Nous avons ici testé l'effet d'une distribution linéaire des seuils d'actions afin d'essayer d'observer la « transition de phase » mise en évidence dans le cas non-local (paragraphe 2.3). La taille moyenne des avalanches en fonction de la pente  $b$  de la distribution est présentée dans la figure 17, pour diverses tailles du voisinage ( $r = 1$ ,  $r = 2$  et  $r = 5$ ). Ces courbes peuvent être comparées à celle de la figure 8, correspondant au cas d'un voisinage infini. Pour

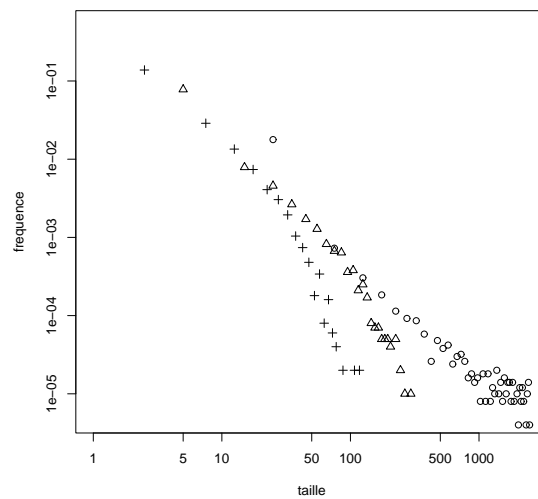


FIG. 15 – Fréquence des avalanches en fonction de leur taille pour  $r = 1$  (+),  $r = 2$  ( $\Delta$ ) et  $r = 10$  (o). Les seuils d'action sont distribués uniformément entre 0 et 1. Chaque courbe est calculée à partir de 10'000 événements. Une régression linéaire sur la courbe  $r = 10$  (à l'exception du premier point) donne  $\ln(P(T)) = -2.07 - 1.29 \ln(T)$ , avec  $R^2 = 0.85$ .

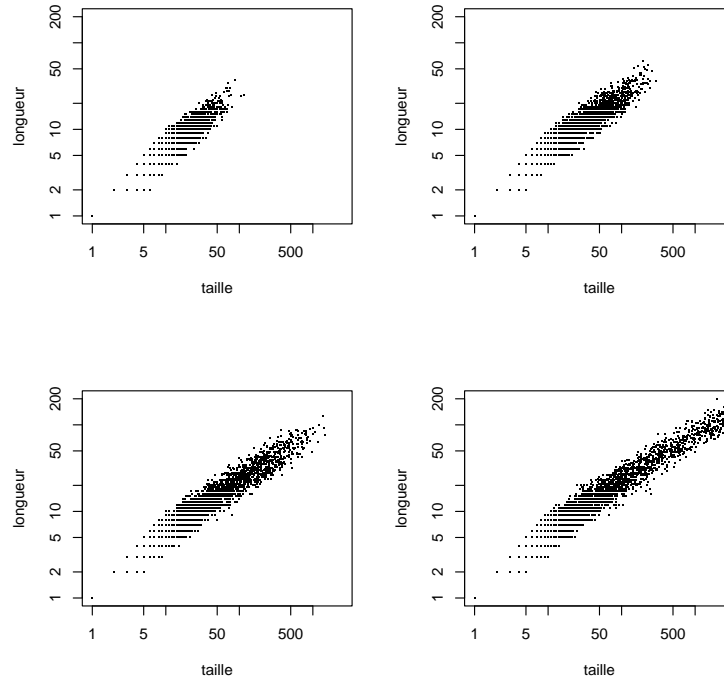


FIG. 16 – Longueur des avalanches en fonction de leur taille pour  $r = 1$  (en haut à gauche),  $r = 2$  (en haut à droite),  $r = 4$  (en bas à gauche) et  $r = 10$  (en bas à droite). Les seuils d'action sont distribués uniformément entre 0 et 1. 10'000 événements sont reportés sur chaque graphique. Une régression linéaire pour  $r = 10$  sur les événements dont la taille est supérieure à 20 donne  $\ln(L) = 0.62 + 0.54 \ln(T)$ , avec  $R^2 = 0.91$ .

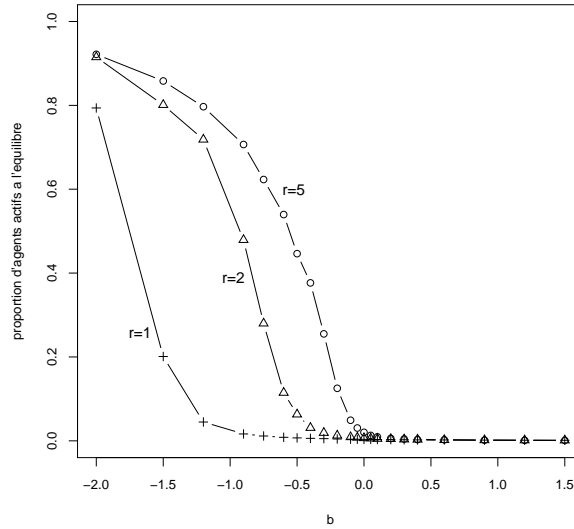


FIG. 17 – Taille moyenne des avalanches en fonction de la pente  $b$  de la distribution linéaire pour  $r = 1$  (+),  $r = 2$  ( $\Delta$ ) et  $r = 5$  ( $\circ$ ). Chaque point est une moyenne sur 2'000 événements.

$r = 1$ , il semble que la transition de phase ait disparu du système; la taille des avalanches décroît régulièrement à mesure que la proportion d'agents à bas seuil diminue (i.e. que  $b$  augmente) dans la population. En revanche, lorsque  $r > 1$ , la transition de phase est observable, pour une valeur de  $b$  critique qui dépend toutefois de  $r$ . Ainsi, le comportement critique en voisinage fini ne s'observe pas pour la distribution uniforme des seuils (cf. paragraphe précédent), mais pour une distribution linéaire de pente légèrement négative. Les distributions de la taille des avalanches associées montrent le même comportement que dans le cas non-local. Lorsque  $b$  est inférieur à la valeur critique, la distribution de la taille des avalanches est bimodale, et la probabilité que l'avalanche atteigne toute la population est forte, de sorte que la taille moyenne des avalanches est grande. Lorsque  $b$  est voisin de sa valeur critique, la distribution de la taille des avalanches est à nouveau en loi de puissance, provoquant des avalanches dont la taille fluctue fortement, et dont la taille moyenne diverge également (dans une population de taille infinie). Enfin, lorsque  $b$  est supérieur à sa valeur critique, la distribution de la taille des avalanches décroît très rapidement, de sorte que les avalanches restent petites.

## 4 Quelques expériences sur le modèle spatialisé

### 4.1 Effet de la configuration spatiale, de la présence d'obstacle et de la densité de population

Jusqu'ici, chaque noeud de la grille était occupée par un agent, et tous les agents agissaient selon la même règle. Afin de tenir compte de la configuration géographique des lieux, de la présence d'obstacles ou d'une densité de population qui ne serait pas maximale sur la grille, nous introduisons dans la population une certaine proportion  $r_N$  d'agents qui ne s'activent jamais, et donc ne « transmettent » jamais l'activité à leurs voisins. On peut considérer les agents neutres comme des individus qui ont un seuil maximal, ou simplement comme des portions de territoire sur lequel ne se trouve aucun agent (éventuellement à cause de la présence d'un obstacle physique). Dans ce cas, les noeuds inoccupés de la grille font encore partie du voisinage des agents. On peut donc s'attendre à observer une décroissance de l'activité de la population en présence d'agents neutres. Pour une distribution uniforme des seuils d'action par exemple, cette décroissance est effectivement observée (fig. 18). La rapidité de cette décroissance est par contre étonnante. La

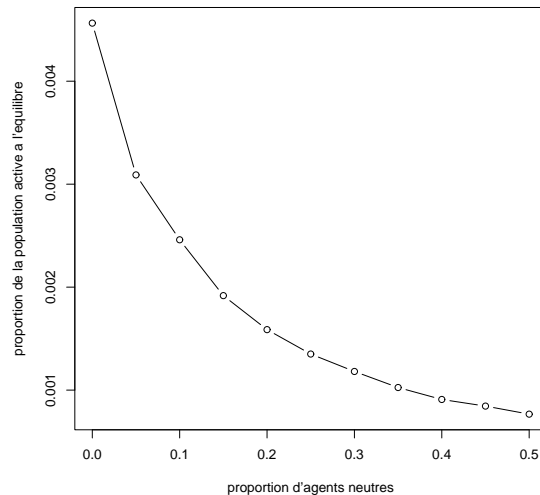


FIG. 18 – Proportion de la population active à l'équilibre en fonction de la proportion d'agents neutres  $r_N$ . Les seuils d'action sont distribués uniformément entre 0 et 1, le voisinage est de rayon  $r = 2$ . Chaque point est une moyenne sur 10'000 événements.

courbe de la figure 18 décroît plus rapidement qu'une exponentielle. À titre d'exemple, la proportion d'agents actifs à l'équilibre est réduite de moitié lorsque la proportion  $r_N$  d'agents neutres passe de 0 à 10%. En d'autres

termes, les agents neutres permettent de réduire fortement l'activité dans la population, même s'ils sont passifs.

## 4.2 Agrégation des agents à bas seuil, effet du groupe

Pour cette expérience, les 2500 agents ont des seuils d'action distribués uniformément et sont placés sur la grille de la manière suivante. Les agents sont séparés en deux groupes : les agents à bas seuil ( $s < 0.2$ ) et les autres. On assigne à chaque agent une cellule vide sur la grille. Si le voisinage de Moore de rayon 1 de cette cellule contient un autre agent du même groupe, alors l'agent est placé sur la cellule proposée avec une probabilité  $\pi$  fixée et choisie à l'avance. Si, au contraire, le voisinage de la cellule vide proposée ne contient aucun agent du même groupe, l'agent est placé avec probabilité  $1 - \pi$  sur cette cellule. Si l'agent n'est pas placé, une autre cellule vide lui est proposée, et la même règle s'applique à nouveau jusqu'à ce que l'agent soit placé. En conséquence, une valeur de  $\pi$  proche de 0 aura pour effet de répartir les agents du même groupe dans la population (ils ont alors une très faible probabilité d'être placés dans le voisinage d'un agent du même groupe), alors qu'une valeur de  $\pi$  proche de 1 aura pour effet de regrouper géographiquement les agents du même groupe (fig. 19). Lorsque  $\pi = 0.5$ , les agents sont placés aléatoirement sur la grille. C'est un agents à bas seuil qui

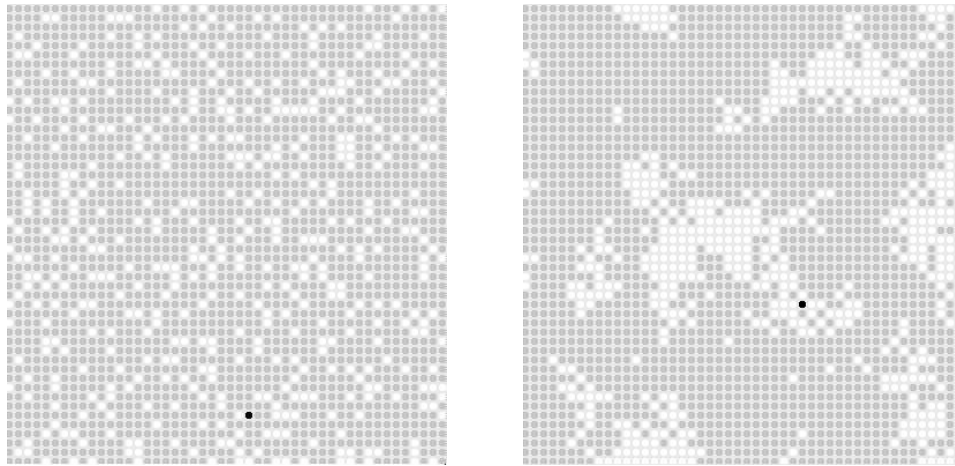


FIG. 19 – Situation initiale des agents pour  $\pi = 0.01$  (à gauche) et pour  $\pi = 0.99$  (à droite). Les agents à bas seuils sont représentés par les cercles blancs, les autres par les cercles gris. L'agent en noir est celui qui sera activé lors de la première itération.

est activé lors de la première itération. Afin de visualiser ce qui se passe, la figure 20 montre la proportion d'agents actifs à l'équilibre en fonction du logit de  $\pi$  ( $\text{logit}(\pi) = \ln\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)$ ). La représentation du  $\text{logit}(\pi)$  plutôt que de  $\pi$  permet de dilater la région du graphique correspondant aux valeurs de

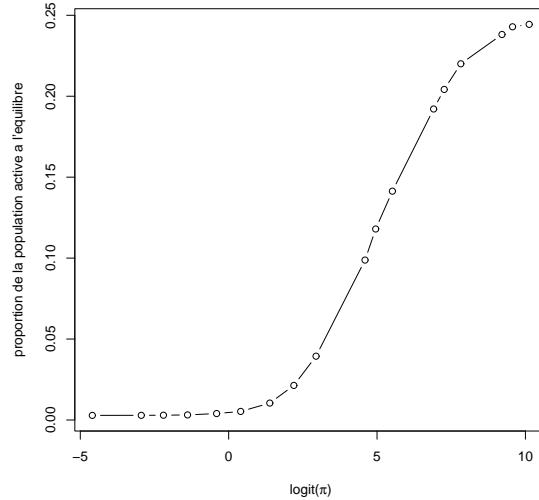


FIG. 20 – Proportion de la population active à l'équilibre en fonction de la probabilité d'agrégation des agents  $\pi$ . Les seuils d'action sont distribués uniformément entre 0 et 1, le voisinage est de rayon  $r = 2$ . Chaque point est une moyenne sur au moins 2'000 événements.

$\pi$  proches de 1 ou proches de 0. La proportion d'agents actifs à l'équilibre augmente considérablement avec  $\pi$ , mais sature à environ  $1/4$  lorsque  $\pi > 0.9999$ . Cette situation correspond au cas où tous les agents à bas seuils sont regroupés en un seul ensemble connexe. L'activation de l'un d'entre eux (première itération) entraîne l'activation de tous les autres, et éventuellement des agents à haut seuil qui se trouvent à l'intérieur ou à proximité du groupe. L'avalanche s'arrête typiquement à la frontière du groupe d'agents à bas seuils (fig. 21). En conclusion, plus les agents à bas seuils sont regroupés, plus ils ont de chance de tous devenir actifs, mais dans tous les cas, seule une petite proportion des agents à haut seuil (ceux qui se trouvent à l'intérieur du groupe ou à sa périphérie immédiate) pourront être entraînés.

Quel peut être l'effet du groupe sur l'activité des agents ? Nous avons décidé de regrouper les agents à bas seuils, mais ceux-ci ne « voient » toujours que ce qui se trouve dans leur voisinage de Moore de rayon 2. En supposant que les agents puissent avoir une information supplémentaire sur l'état d'activité de leur groupe, il paraît naturel qu'ils en tiennent compte. Modifions en conséquence la règle de décision des agents. À chaque itération, la proportion  $r_1$  (resp.  $r_2$ ) d'agents à bas (resp. haut) seuil actifs est calculée. Cette proportion comptera, aux yeux de chaque agent, comme l'activité de  $g$  agents supplémentaires dans leur entourage. Tout se passe donc comme si le voisinage était augmenté de  $g$  agents, dont la proportion active est celle

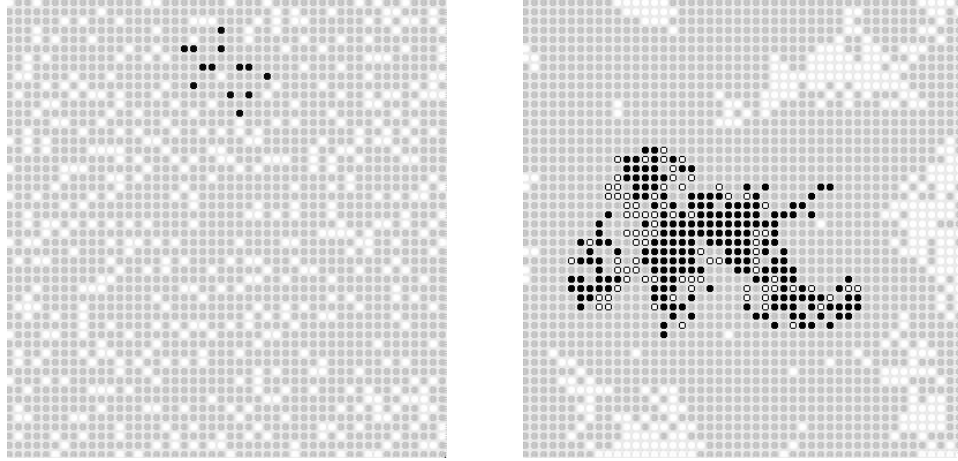


FIG. 21 – Situation finale des agents pour  $\pi = 0.01$  (à gauche) et pour  $\pi = 0.99$  (à droite). Les agents à bas seuils sont blancs si inactifs et noirs sinon, les autres sont gris si inactifs et des cercles noirs remplis de blanc sinon. Le voisinage est de rayon  $r = 2$ .

du groupe auquel ils appartiennent. Formellement, un agent du groupe  $i$  ( $i = 1, 2$  pour le groupe des agents à bas seuil ou celui des agents à haut seuil respectivement) dont le seuil est  $s$  devient actif si

$$\frac{\sum_{j \in V} a_j + g \cdot r_i}{|V| + g} \geq s, \quad (16)$$

où  $V$  est le voisinage de l'agent, et  $a_j$  vaut 1 si le voisin  $j$  est actif et 0 sinon. Lorsque  $g = 0$ , on retrouve la situation précédente, dans laquelle les agents ne tiennent pas compte de l'ampleur de l'activité dans leur groupe. Si  $g = |V|$ , l'activité du groupe a la même importance que l'activité du voisinage, et pour  $g > |V|$ , l'activité du groupe devient prédominante. Deux exemples typiques de situations à l'équilibre pour  $g = 10$  sont données dans la figure 22. Par rapport à la situation où les agents ne tiennent pas compte de l'activité du groupe ( $g = 0$ , fig. 21), on constate que l'activité est nettement plus présente chez les agents à bas seuils, puisqu'aucun de ceux-ci n'est inactif. Le graphique de la figure 23 montre la proportion d'agents actifs à l'équilibre en fonction de  $\pi$  et de  $g$ . Globalement, une valeur élevée de  $g$  a pour effet d'augmenter la proportion d'agents actifs à l'équilibre. Pour  $g = 0$ , nous retrouvons la courbe de la figure 20 : plus les agents à bas seuils sont groupés, plus ils seront actifs, sans toutefois entraîner avec eux le reste de la population. Lorsque  $g$  augmente, le maximum du nombre d'agents actifs n'est pas atteint lorsque  $\pi$  est maximum, mais lorsque  $\pi \simeq 0.98$  ( $\text{logit}(\pi) \simeq 4$ ). Notons qu'ici encore, la proportion d'agents actifs ne dépasse jamais environ un quart de la population totale, ce qui correspond à la totalité du groupe d'agents à bas seuil, et peu d'autres agents. Pour de très grandes valeurs de



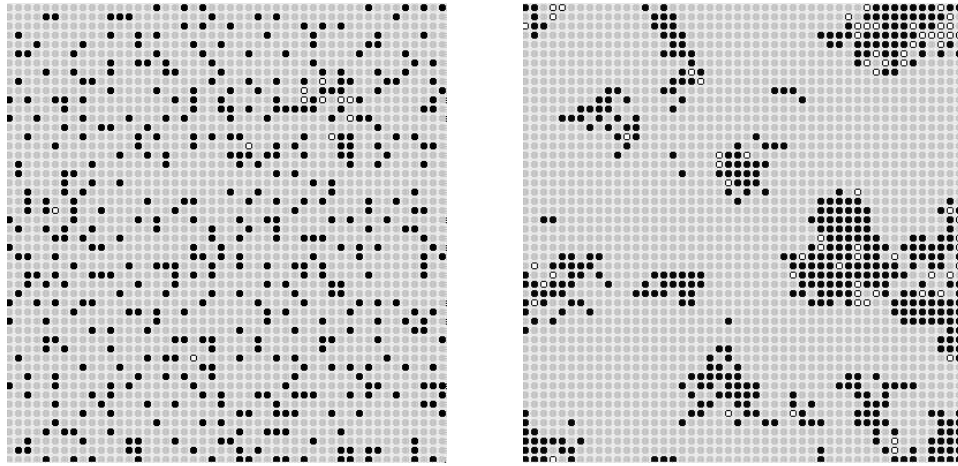


FIG. 22 – Situation finale des agents pour  $\pi = 0.01$  (à gauche) et pour  $\pi = 0.99$  (à droite), avec  $g = 10$ . Les agents à bas seuils sont blancs si inactifs et noirs sinon, les autres sont gris si inactifs et des cercles noirs remplis de blanc sinon. Le voisinage est de rayon  $r = 2$ .

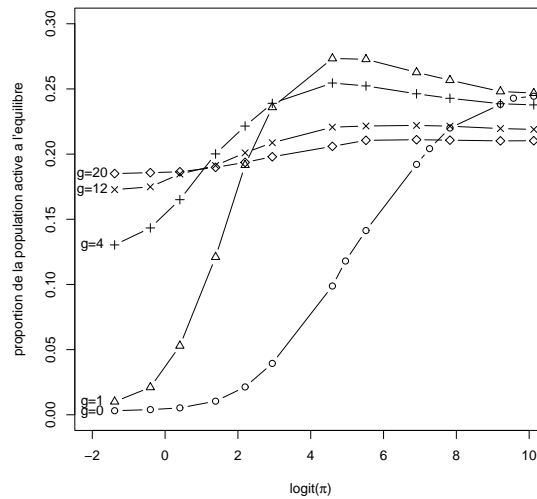


FIG. 23 – Proportion de la population active à l'équilibre en fonction de la probabilité d'agrégation des agents  $\pi$  et de l'influence du groupe  $g$ . Les seuils d'action sont distribués uniformément entre 0 et 1, le voisinage est de rayon  $r = 2$ . Chaque point est une moyenne sur au moins 2'000 événements.

$g$ ,  $\pi$  perd de son influence : quelle que soit sa valeur, un cinquième environ de la population est active (i.e. le groupe d'agents à bas seuil). En résumé, pour que les membre du groupe d'agents à bas seuil soient sûrs que l'activité est transmise à chacun d'entre eux, il faut qu'ils soient fortement regroupés ( $\pi$  proche de 1), ou qu'ils soient sensibles à l'activités des membres de leur groupes, même lointains.

## 5 Une version dynamique du modèle

L'un des inconvénient majeurs du modèle de Granovetter est que les agents possèdent une règle leur permettant de devenir actif, mais aucune qui les fasse retourner dans leur état initial. Ce modèle permet certes d'étudier la genèse de certains phénomènes collectifs, mais n'autorise pas d'en observer la dynamique. Nous nous plaçons ici dans le cadre d'un modèle où les seuils d'action sont distribués uniformément entre 0 et 1, et où les agents comparent leur seuil à la proportion d'agents actifs dans leur voisinage de Moore de rayon  $r = 1$ , mais nous ferons dans la suite l'hypothèse supplémentaire que, lorsqu'un agent devient actif, son attitude par rapport au phénomène en cours va changer. Cependant, en participant à l'action collective, sera-t-il de plus en plus motivé, ou aura-t-il au contraire envie de s'en retirer ? Cela dépend vraisemblablement de la personnalité de l'agent et de son passé, du type d'action en cours et de ses effets sur les agents, et de la manière dont les autres agents y réagissent. En l'absence de toutes ces informations et sans vouloir introduire de nouvelles hypothèses qui pourraient paraître arbitraires, nous sommes conduits à choisir une règle non déterministe. Nous allons donc supposer que chaque fois qu'un agent devient actif, son seuil d'action va changer de manière aléatoire, et prendre une nouvelle valeur issue de la distribution initiale des seuils. Le nouveau seuil attribué pourra alors être plus petit ou plus grand que le précédent, ce qui s'interprétera en disant que la motivation de l'agent à augmenté ou diminué lorsqu'il a pris part à l'action. Si son seuil initial était très élevé, il est très probable que le nouveau seuil soit inférieur, et donc que la motivation de l'agent ait augmenté. Si au contraire le seuil initial est bas, il y a de fortes chances pour que le nouveau seuil de l'agent soit plus grand, et que sa motivation ait diminué. Notons que la probabilité qu'un agent actif redevienne actif quelques itérations plus tard est relativement élevée (en dépit du fait que son seuil change), car son activité a pu entraîner certains de ses voisins, qui à leur tour l'entraîneront. Nous constatons alors que la probabilité d'observer une grande avalanche devient très faible, puisque la fréquence des avalanches décroît exponentiellement en fonction de leur taille ( $P(T) \propto \exp(-0.25T)$ , fig. 24). Dans l'ensemble, donc, la population est moins sensible aux perturbations provoquées par un seul agent.

Ce modèle présente une analogie certaine avec le modèle de Bak-Sneppen

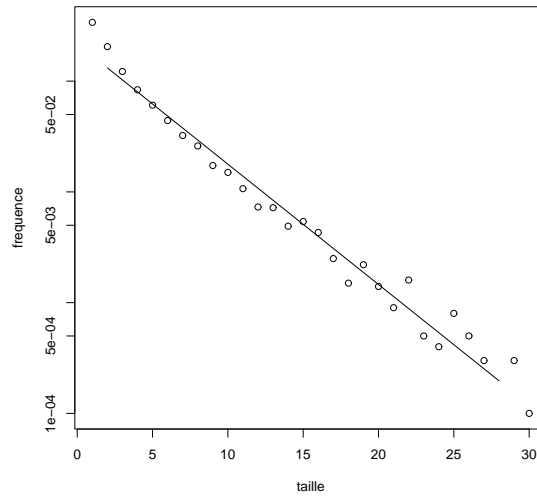


FIG. 24 – Fréquence des avalanches en fonction de leur taille lorsque les agents activés changent de seuil. Les seuils d'action sont distribués uniformément entre 0 et 1, le voisinage est de rayon  $r = 2$ . La distribution est estimée à partir de 10'000 événements. Une régression linéaire donne  $\ln(P(T)) = -1.53 - 0.25 \ln(T)$ , avec  $R^2 = 0.97$ .

[1] d'évolution biologique, à ceci près que leur règle d'évolution est itérée dans la même population, et que le changement d'état des agents n'est pas conditionné à une règle de seuil. Voyons si le type de règle implémenté ici permettrait de faire apparaître une organisation au sein de la population. Pour ce faire, la population n'est pas changée à chaque itération, mais est conservée tout au long de l'expérience. En d'autres termes, la population est fixée une fois pour toutes, un agent est choisi au hasard dans la population pour être activé et on laisse l'avalanche (éventuelle) se dérouler jusqu'à une situation d'équilibre (i.e. dans laquelle aucun agent n'est actif), en ayant soin de changer le seuil des agents actifs à chaque itération. Dans la même population, on choisit à nouveau au hasard un agent que l'on force à l'activité, etc. Lorsque la situation s'est stabilisée, quelle est la distribution des seuils dans la population ? Et quelle est la sensibilité de celle-ci aux phénomènes collectifs par rapport à la situation où les agents conservent leur seuil ?

Afin d'obtenir la distribution stationnaire des seuils, on laisse 10'000 itérations avoir lieu dans la population. On calcule ensuite la distribution moyenne sur les 500'000 itérations suivantes. La figure 25 montre la distribution obtenue. Ici encore, un phénomène d'émergence est observé. Nous constatons que les bas seuils ( $< 1/8$ ) ont tendance à être éliminés de la population, sans que cela n'ait été explicitement prévu par les règles initiales, qui précise simple-

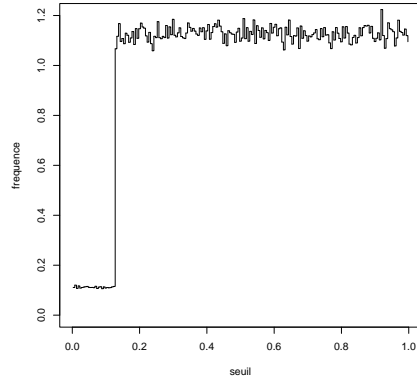


FIG. 25 – Distribution stationnaire des seuils lorsque le seuil de chaque agent actif est changé aléatoirement. La distribution initiale est une distribution uniforme entre 0 et 1, le voisinage est de rayon  $r = 1$ .

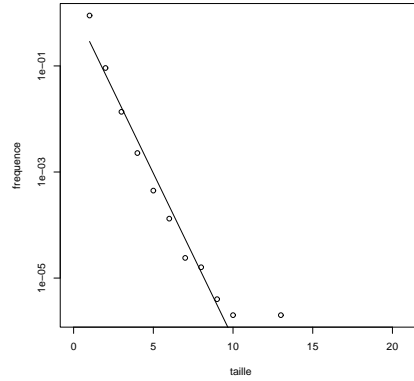


FIG. 26 – Distribution de la taille des avalanches.  $\ln(P(T)) = 0.19 - 1.43 \ln(T)$ , avec  $R^2 = 0.98$  pour les tailles comprises entre 1 et 10.

ment que le seuil des agents est remplacé par une valeur tirée au hasard dans une distribution uniforme. Cependant, un autre phénomène est à l'œuvre, qui fait que les agents qui ont un seuil inférieur à  $1/8$  deviendront actifs dès que l'un de leur voisin le sera, et changeront donc de seuil. Les seuils inférieurs à  $1/8$  ont donc plus de chances de changer souvent, jusqu'à ce qu'ils se trouvent dans la région  $[1/8; 1]$ . Par rapport au modèle de Bak-Sneppen, la partie linéaire de la distribution au-dessous du seuil critique a disparu au profit d'une seconde distribution uniforme d'amplitude plus faible. Par ailleurs, le seuil critique prend ici une valeur facile à estimer, contrairement au modèle de Bak-Sneppen.

Lorsque les itérations sont effectuées dans la même population, celle-ci devient de moins en moins sensible aux perturbations apportées par un seul agent, comme en témoigne la distribution de la fig. 26, qui montre que  $P(T) \propto \exp(-1.43T)$ . Ceci peut s'interpréter comme une certaine fatigue de la population par rapport à l'activité. Alors qu'une avalanche de grande taille est observable au début du processus (où la distribution des seuils est uniforme), elle devient quasiment impossible après un certain nombre d'itérations, lorsque la distribution stationnaire est atteinte.

## 6 Conclusion

Bien que le choix d'une distribution particulière pour les seuils d'action change le comportement du système, les observations qualitatives que l'on en tire semblent être indépendantes de ce choix : entre deux populations statistiquement identiques, la différence du nombre d'agents actifs à l'équilibre peut être arbitrairement grande. Qualitativement, il est autant possible d'observer un seul agent actif qu'une foule entière sans qu'il n'y ait de différence significative a priori entre ces deux populations. La situation finale est imprévisible à partir de la situation initiale (autrement que par une simulation de cette situation particulière), et ce qui peut apparaître comme un phénomène coordonné ne prend naissance que par la coïncidence fortuite de certains états chez certains agents. Toutefois, ce cas de figure ne se produit que pour des valeurs particulières des paramètres des distributions des seuils d'action. Il n'y a pas d'auto-organisation du système qui l'ammène vers ces valeurs particulières. Bien qu'il puisse être observé, il n'y a a priori aucune raison pour que ce comportement plutôt qu'un autre apparaisse pour deux populations prises au hasard.

Ces conclusions restent vraies lorsque l'information accessible aux agents est limitée à leur entourage proche, pour autant qu'il soit plus grand que le voisinage de Moore de rayon 1. Par ailleurs, la dynamique spatiale est plus riche. On peut en effet observer la naissance de groupes actifs qui grandissent autour d'agents à bas seuil pour « contaminer » le reste de la population. Là encore, ces groupes apparaissent spontanément, sans que les agents ne le cherchent et sans même qu'ils ne s'en rendent compte (ils n'en ont ni la capacité « cognitive », ni la capacité « physiologique », puisque leur vision ne s'étend qu'à leur voisinage immédiat).

L'introduction d'agents neutres (i.e. qui ne s'activent jamais) répartis au hasard dans la population s'accompagne d'une diminution importante de l'activité à l'équilibre. La proportion d'agents actifs décroît plus rapidement qu'une fonction exponentielle avec la proportion d'agents neutres. La présence d'agents neutres s'interprète aussi bien comme des obstacles physique que comme une densité plus faible de la population, ou encore comme des représentants des forces de l'ordre. Il est important de noter qu'une présence même largement minoritaire d'agents neutres – qui sont passifs – permet de réduire de manière importante l'activité dans la population.

Nous avons montré par ailleurs que plus les agents à bas seuils sont regroupés dans la population, plus il est probable qu'ils soient tous activés à l'équilibre. Toutefois, cette condition n'est pas nécessaire si ces agents disposent de moyens de communications qui vont au-delà de leur voisinage immédiat. Il y a une combinaison optimale du regroupement et du degré de communication avec son groupe qui font que le pouvoir d'activer le plus d'agents possible dans la population est maximal.

Enfin, une version dynamique du modèle, dans laquelle les agents changent

aléatoirement de seuil dès lors qu'ils sont actifs fait apparaître une sorte de fatigue dans la population. En effet, dans ce cas, la probabilité d'observer une avalanche décroît exponentiellement avec sa taille. De plus, en itérant le processus dans la même population, la distribution des seuils évolue vers une distribution stationnaire dans laquelle les bas seuils sont rares, voire inexistantes.

## Bibliographie

- [1] Bak P., Sneppen K., 1993, *Punctuated Equilibrium and Criticality in a Simple Model of Evolution*, Phys. Rev. Lett. **71**, 24, pp. 4083-6.
- [2] Granovetter M., 1978, *Threshold Models of Collective Behaviour*, Am. Jour. Soc. **83**, 6, pp. 1420-43.
- [3] Jager W., Popping R., van de Sande H., 2001, *Clustering and Fighting in Two-party Crowds : Simulating the Approach-avoidance Conflict*, JASSS **4**, 3. <<http://jasss.soc.surrey.ac.uk/4/3/7.html>>
- [4] Turcotte D.L., 1999, *Self-organized Criticality*, Rep. Prog. Phys. **62**, pp. 1377-1429.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Le modèle de Granovetter</b>	<b>2</b>
2.1	Le modèle de Granovetter . . . . .	2
2.2	Distribution uniforme des seuils d'action . . . . .	7
2.3	Distribution linéaire des seuils d'action . . . . .	9
2.4	Comportement moyen du système . . . . .	9
2.5	Solution exacte du modèle . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Une version spatialisée du modèle</b>	<b>13</b>
3.1	Distribution normale des seuils d'actions . . . . .	14
3.2	Distribution uniforme des seuils d'action . . . . .	15
3.3	Distribution linéaire des seuils d'action . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Quelques expériences sur le modèle spatialisé</b>	<b>20</b>
4.1	Effet de la configuration spatiale, de la présence d'obstacle et de la densité de population . . . . .	20
4.2	Agrégation des agents à bas seuil, effet du groupe . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Une version dynamique du modèle</b>	<b>25</b>
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>28</b>