Juin 2010 **Numéro 45**

Cahiers de l'IMA

Syllogismes et sorites : Une procédure de vérification arithmétique

Henri Volken

Institut de Mathématiques Appliquées
Faculté des S.S.P.
Université de Lausanne
Anthropole
1015 Lausanne

Syllogismes et sorites :
Une procédure de vérification arithmétique

Henri Volken

Institut de Mathématiques Appliquées
Faculté des S.S.P.
Université de Lausanne
Anthropole
1015 Lausanne

Table des matières

Le syllogisme est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le seul fait de ces données. Par le seul fait de ces données : je veux dire que c'est par elles que la conséquence est obtenue ; à son tour, l'expression c'est par elles que la conséquence est obtenue signifie qu'aucun terme étranger n'est en plus requis pour produire la conséquence nécessaire.

Aristote, *Premiers Analytiques*[1]

1 Syllogismes

Nous allons utiliser le terme *syllogisme* à la manière d'Aristote pour désigner un raisonnement codifié, comportant deux *hypothèses* (ou *prémisses*) et une *conclusion*, toutes trois d'une forme bien précise. Chacun de ces trois énoncés comporte deux prédicats de rang un, et apparaît sous l'une des quatre formes :

1. $\forall x(Px \to Qx)$
2. $\forall x(Px \to \neg Qx)$
3. $\exists x(Px \wedge Qx)$
4. $\exists x(Px \wedge \neg Qx)$

1. et 2. sont des propositions *universelles*, 3. et 4. des *particulières*. 1. et 3. sont *affirmatives*, 2. et 4. *négatives*.

Dans la terminologie des logiciens scolastiques, on trouve les abréviations suivantes, que nous allons adopter également, afin de simplifier l'écriture. Voici le tableau de ces abréviations, avec quelques équivalences logiques utiles :

$$\begin{aligned}
aPQ &:= \forall x(Px \to Qx) \equiv \neg oPQ \\
ePQ &:= \forall x(Px \to \neg Qx) \equiv \neg iPQ \equiv eQP \\
iPQ &:= \exists x(Px \wedge Qx) \equiv \neg ePQ \equiv iQP \\
oPQ &:= \exists x(Px \wedge \neg Qx) \equiv \neg aPQ
\end{aligned}$$

Dans le formalisme de la logique du premier ordre, un syllogisme peut se décrire dans l'une des variantes suivantes :

$$\varphi, \psi \models \theta \qquad \text{ou} \qquad \varphi, \neg\theta \models \neg\psi \qquad \text{ou} \qquad \psi, \varphi \models \theta$$

1. voir : [1]

Pour suivre la représentation traditionnelle, nous utiliserons une forme graphique équivalente, et nous noterons, pour décrire le syllogisme comprenant deux hypothèses φ and ψ et une conclusion θ :

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi\\ \psi\end{array}}{\theta} \qquad \text{au lieu de} \qquad \varphi, \psi \models \theta$$

Un syllogisme typique selon Aristote s'écrit alors dans notre convention comme suit (ici l'exemple classique, nommé BARBARA par les scolastiques, moyen mnémotechnique pour se souvenir de la suite des voyelles) :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{aQR}\\ \text{aPQ}\end{array}}{\text{aPR}}$$

Retraduit dans le langage de la logique du premier ordre, le syllogisme devient :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(Qx \to Rx)\\ \forall x(Px \to Qx)\end{array}}{\forall x(Px \to Rx)} \quad \text{soit par exemple :} \quad \frac{\begin{array}{c}\text{Tous les hommes sont mortels}\\ \text{Tous les grecs sont des hommes}\end{array}}{\text{Tous les grecs sont mortels}}$$

Bien sûr, si un syllogisme est logiquement valide, on peut effectuer une permutation circulaire de ses symboles de prédicats, et il reste valide. Pour éviter toute ambiguïté, et pour ne pas nommer un syllogisme de deux manières différentes, nous adoptons la convention d'Aristote : la conclusion contient les prédicats P et R, dans cet ordre.

Dans la terminologie d'Aristote, la première hypothèse s'appelle la *majeure* et la seconde la *mineure*. Si $V = \{a, e, i, o\}$, alors la majeure est décrite par un mot du type $V\{QR, RQ\}$ et la mineure du type $V\{PQ, QP\}$. La conclusion est toujours de la forme $V\{PR\}$. R est le terme *majeur*, Q le terme *moyen* et P le terme *mineur*. C'est la forme *canonique* d'Aristote.

De plus, Aristote distingue quatre *figures*, numérotées de I à IV, selon la structure des deux hypothèses. Ces différentes figures peuvent se distinguer assez facilement par l'emplacement du terme moyen dans les deux hypothèses.

Le tableau suivant reprend la terminologie d'Aristote. Il est à remarquer qu'Aristote ne retient pas la quatrième figure, mais il obtient les syllogismes valides de cette figure par d'autres moyens (par *conversion* à partir de la première figure).

Figure I	:	$V\{QR\}$	et	$V\{PQ\}$
Figure II	:	$V\{RQ\}$	et	$V\{PQ\}$
Figure III	:	$V\{QR\}$	et	$V\{QP\}$
Figure IV	:	$V\{RQ\}$	et	$V\{QP\}$

Le syllogisme BARBARA, défini plus haut, est donc, dans cette convention, un syllogisme de la première figure.

Le nombre de syllogismes possibles est de 256, c'est-à-dire 64 par figure. Pour s'en convaincre, il suffit de remplir, pour chacune des quatre figures, les trois cases vides par l'un des symboles de $V = \{a, e, i, o\}$. Il y a chaque fois $4^3 = 64$ possibilités :

$$\frac{\Box QR \quad \Box PQ}{\Box PR} \qquad \frac{\Box RQ \quad \Box PQ}{\Box PR} \qquad \frac{\Box QR \quad \Box QP}{\Box PR} \qquad \frac{\Box RQ \quad \Box QP}{\Box PR}$$

2 Validité

Certains de ces 256 syllogismes possibles sont valides dans le sens de la logique actuelle du premier ordre : dans chaque monde possible où les deux hypothèses sont vraies, la conclusion l'est aussi ! Il existe plusieurs manières de vérifier la validité d'un syllogisme avec les moyens mathématiques de la logique. La méthode des *tableaux* de Smullyan [2] ou la méthode des *arbres de preuve* [3], entre autres, permettent de montrer formellement qu'un argument, comme un syllogisme, est valide dans ce sens précis.

Nous allons le montrer pour deux syllogismes de la première figure, BARBARA et FERIO en utilisant la méthode des arbres de preuve. Ensuite nous présenterons quelques méthodes pour dériver des syllogismes à partir d'autres

2. voir : [3]
3. voir par exemple : [4]

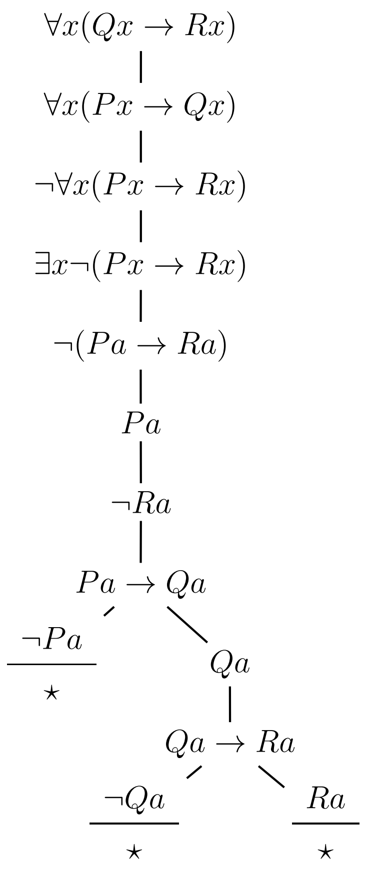
syllogismes tout en préservant la validité de ceux-ci.

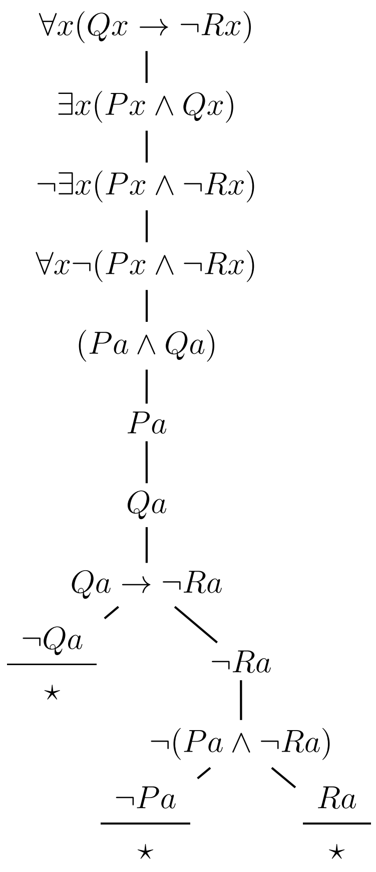
Tout d'abord, la validité des deux syllogismes évoqués plus haut et dont nous voyons ici le schéma déductif :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{aQR} \\ \text{aPQ} \\ \hline \text{aPR} \end{array}} \qquad\qquad \boxed{\begin{array}{c} \text{eQR} \\ \text{iPQ} \\ \hline \text{oPR} \end{array}}$$

Barbara — Ferio

Et voici les deux arbres de preuve qui établissent leur validité respective [4] :





4. pour les détails voir : [4]

3 Conversions

A partir de la validité d'un syllogisme on peut inférer la validité d'un autre en utilisant différentes transformations, les *conversions*. Tout d'abord, on peut intervertir l'ordre des hypothèses sans altérer le contenu logique d'un syllogisme :

Commutation (1) : $\dfrac{\begin{matrix}\varphi\\ \psi\end{matrix}}{\theta}$ est équivalent à $\dfrac{\begin{matrix}\psi\\ \varphi\end{matrix}}{\theta}$

Ensuite, par la contraposition on peut inverser la conclusion et l'une des hypothèses en faisant précéder ces deux énoncés d'une négation :

Contraposition (2) : $\dfrac{\begin{matrix}\varphi\\ \psi\end{matrix}}{\theta}$ est équivalent à $\dfrac{\begin{matrix}\varphi\\ \neg\theta\end{matrix}}{\neg\psi}$

Finalement, on peut permuter les symboles de prédicats, c'est-à-dire, si f est une bijection sur l'ensemble $\{P, Q, R\}$, alors :

Permutation (3) : $\dfrac{\begin{matrix}\Box QR\\ \Box PQ\end{matrix}}{\Box PR}$ est équivalent à $\dfrac{\begin{matrix}\Box f(Q)f(R)\\ \Box f(P)f(Q)\end{matrix}}{\Box f(P)f(R)}$

Munis de ces opérations de conversion, nous pouvons nous poser la question du nombre de syllogismes valides sur les 256 possibles. Nous en connaissons déjà deux, BARBARA et FERIO, dont nous avons montré la validité par des moyens mathématiques de la logique, en l'occurrence les arbres de preuve. A partir de ces deux exemples, nous pouvons en dériver d'autres, pour arriver finalement au nombre de quinze syllogismes valides, quatre pour chacune des trois premières figures, et trois pour la quatrième.

Dans les lignes qui suivent nous montrons une possibilité de dériver les treize autres syllogismes à partir des deux évoqués plus haut. (Les syllogismes encadrés sont sous forme canonique.)

$$\underset{\text{Barbara}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{aQR}\\ \mathrm{aPQ}\\ \hline \mathrm{aPR}\end{array}}} \;\underset{(2)}{\text{ssi}}\; \begin{array}{c}\mathrm{aQR}\\ \mathrm{oPR}\\ \hline \mathrm{oPQ}\end{array} \;\underset{(3)}{\text{ssi}}\; \underset{\text{II}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{aRQ}\\ \mathrm{oPQ}\\ \hline \mathrm{oPR}\end{array}}} \;\underset{(1)}{\text{ssi}}\; \begin{array}{c}\mathrm{oPQ}\\ \mathrm{aRQ}\\ \hline \mathrm{oPR}\end{array} \;\underset{(2)}{\text{ssi}}\; \begin{array}{c}\mathrm{oPQ}\\ \mathrm{aPR}\\ \hline \mathrm{oRQ}\end{array} \;\underset{(3)}{\text{ssi}}\; \underset{\text{III}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{oQR}\\ \mathrm{aQP}\\ \hline \mathrm{oPR}\end{array}}}$$

$$\underset{\text{Ferio}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{eQR}\\ \mathrm{iPQ}\\ \hline \mathrm{oPR}\end{array}}} \;\underset{(2)}{\text{ssi}}\; \begin{array}{c}\mathrm{eQR}\\ \mathrm{aPR}\\ \hline \mathrm{ePQ}\end{array} \;\underset{(3)}{\text{ssi}}\; \underset{\text{II}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{eRQ}\\ \mathrm{aPQ}\\ \hline \mathrm{ePR}\end{array}}} \;\underset{(\star)}{\text{ssi}}\; \underset{\text{I}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{eQR}\\ \mathrm{aPQ}\\ \hline \mathrm{ePR}\end{array}}}$$

$$\underset{\text{Ferio}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{eQR}\\ \mathrm{iPQ}\\ \hline \mathrm{oPR}\end{array}}} \;\underset{(\star)}{\text{ssi}}\; \underset{\text{II}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{eRQ}\\ \mathrm{iPQ}\\ \hline \mathrm{oPR}\end{array}}} \;\underset{(\star)}{\text{ssi}}\; \underset{\text{III}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{eQR}\\ \mathrm{iQP}\\ \hline \mathrm{oPR}\end{array}}} \;\underset{(\star)}{\text{ssi}}\; \underset{\text{IV}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{eRQ}\\ \mathrm{iQP}\\ \hline \mathrm{oPR}\end{array}}}$$

$$\underset{\text{Ferio}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{eQR}\\ \mathrm{iPQ}\\ \hline \mathrm{oPR}\end{array}}} \;\underset{(1)}{\text{ssi}}\; \begin{array}{c}\mathrm{iPQ}\\ \mathrm{eQR}\\ \hline \mathrm{oPR}\end{array} \;\underset{(2)}{\text{ssi}}\; \begin{array}{c}\mathrm{iPQ}\\ \mathrm{aPR}\\ \hline \mathrm{iQR}\end{array} \;\underset{(\star)}{\text{ssi}}\; \begin{array}{c}\mathrm{iQP}\\ \mathrm{aQR}\\ \hline \mathrm{iPR}\end{array} \;\underset{(1)}{\text{ssi}}\; \underset{\text{III}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{aQR}\\ \mathrm{iQP}\\ \hline \mathrm{iPR}\end{array}}} \;\underset{(\star)}{\text{ssi}}\; \underset{\text{I}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{aQR}\\ \mathrm{iPQ}\\ \hline \mathrm{iPR}\end{array}}}$$

$$\underset{\text{II}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{eRQ}\\ \mathrm{aPQ}\\ \hline \mathrm{ePR}\end{array}}} \;\underset{(1)}{\text{ssi}}\; \begin{array}{c}\mathrm{aPQ}\\ \mathrm{eRQ}\\ \hline \mathrm{ePR}\end{array} \;\underset{(3)}{\text{ssi}}\; \begin{array}{c}\mathrm{aRQ}\\ \mathrm{ePQ}\\ \hline \mathrm{eRP}\end{array} \;\underset{(\star)}{\text{ssi}}\; \underset{\text{II}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{aRQ}\\ \mathrm{ePQ}\\ \hline \mathrm{ePR}\end{array}}} \;\underset{(\star)}{\text{ssi}}\; \underset{\text{IV}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{aRQ}\\ \mathrm{eQP}\\ \hline \mathrm{ePR}\end{array}}}$$

$$\underset{\text{IV}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{aRQ}\\ \mathrm{eQP}\\ \hline \mathrm{ePR}\end{array}}} \;\underset{(2)}{\text{ssi}}\; \begin{array}{c}\mathrm{aRQ}\\ \mathrm{iPR}\\ \hline \mathrm{iQP}\end{array} \;\underset{(1)}{\text{ssi}}\; \begin{array}{c}\mathrm{iPR}\\ \mathrm{aRQ}\\ \hline \mathrm{iQP}\end{array} \;\underset{(3)}{\text{ssi}}\; \underset{\text{IV}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{iRQ}\\ \mathrm{aQP}\\ \hline \mathrm{iPR}\end{array}}} \;\underset{(\star)}{\text{ssi}}\; \underset{\text{III}}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{iQR}\\ \mathrm{aQP}\\ \hline \mathrm{iPR}\end{array}}}$$

$(\star)$ désigne l'application de l'une des propriétés $\mathrm{eXY} \equiv \mathrm{eYX}$ ou $\mathrm{iXY} \equiv \mathrm{iYX}$.

Voici le tableau des noms que les logiciens scolastiques ont attribués aux quinze syllogismes canoniques valides de la classification d'Aristote. La succession des voyelles, en gras dans le tableau, et la colonne des figures, permettent de reconnaître facilement chaque syllogisme.

I	II	III	IV
B**a**rb**a**r**a**	B**a**r**o**c**o**	B**o**c**a**rd**o**	Fr**e**s**i**s**o**n
F**e**r**io**	C**e**s**a**r**e**	F**e**r**i**s**o**n	C**a**m**e**n**e**s
C**e**l**a**r**e**nt	F**e**st**i**n**o**	D**i**s**a**m**i**s	D**i**m**a**r**i**s
D**a**r**ii**	C**a**m**e**str**e**s	D**a**t**i**s**i**	

4 Le problème de la vérification

Comment détecter les syllogismes valides – appelés parfois *concluants* – par des moyens simples ? La question de la vérification a été abordée de plusieurs façons. Historiquement, les logiciens scolastiques ont indiqué des règles de formation communes à toutes les formes valides. Cela permet d'éliminer rapidement des syllogismes fautifs. Voici l'essentiel de ces règles :

De deux particulières on ne peut rien conclure.

De deux négatives on ne peut rien conclure.

Le terme moyen doit être pris au moins une fois dans son acception universelle.

La conclusion suit toujours la prémisse la plus faible. (Une particulière est plus faible qu'une universelle. Une négative est plus faible qu'une affirmative)

Deux prémisses affirmatives ne peuvent donner une conclusion négative.

Deux prémisses universelles ne peuvent donner une conclusion particulière[5].

5. Cette dernière règle n'était pas acceptée par les scolastiques. Mais elle correspond à la position de la logique formelle actuelle.

Un application directe de ces règles permet d'écarter un grand nombre des 256 syllogismes. Par exemple, les formes suivantes ne sont pas concluantes :

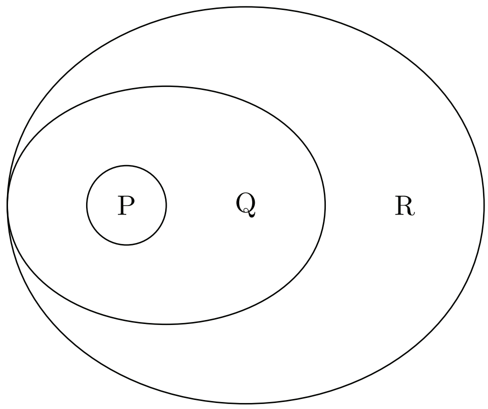
$$\begin{array}{c} i\square\square \\ o\square\square \\ \hline ? \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} e\square\square \\ o\square\square \\ \hline ? \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} i\square\square \\ i\square\square \\ \hline ? \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} a\square\square \\ e\square\square \\ \hline ePR \end{array}$$

De nombreux autres syllogismes sont ainsi repérés comme non valides.

Une manière un peu plus constructive de vérifier la validité des syllogismes consiste à utiliser les diagrammes d'Euler, ou les diagrammes de Venn. Les prédicats sont représentés, dans leur extension, par des cercles ou des ovales. On étudie leurs intersections en fonction des relations exprimées par les deux hypothèses et on en tire une conclusion par des considérations graphiques. Par exemple, le syllogisme valide BARBARA peut se représenter dans ce cadre par le dessin suivant :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{aQR} \\ \text{aPQ} \\ \hline \text{aPR} \end{array}}$$

Barbara



Il est visible que sous cette forme, ce syllogisme n'exprime rien d'autre que la transitivité de l'inclusion ensembliste. Le prochain exemple montre le syllogisme FERIO et sa représentation par un diagramme d'Euler.

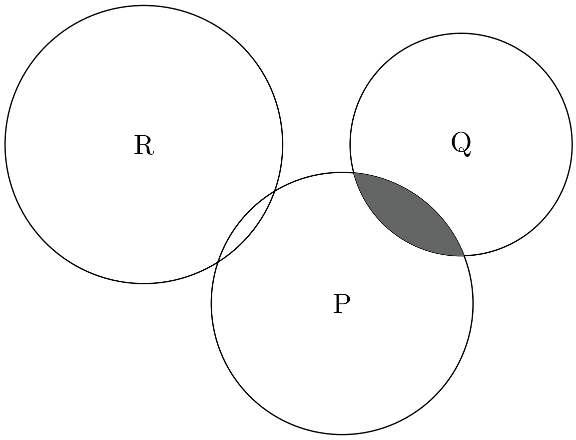
Dans ce diagramme, la partie hachurée correspond à un sous-ensemble non vide, comme l'exige l'hypothèse iPQ. Or ce sous-ensemble, étant contenu dans Q, n'a pas d'intersection avec R, ce qui est garanti par l'hypothèse eQR. Donc il existe un sous-ensemble non vide de P qui n'a pas d'intersection avec R.

Comme on le voit, la méthode des diagrammes d'Euler ou de Venn ramène le problème de la validité du syllogismes à un problème d'ensembles.

Voici le diagramme qui illustre ce syllogisme, tel qu'on peut le trouver dans de nombreux textes d'introduction à la logique :

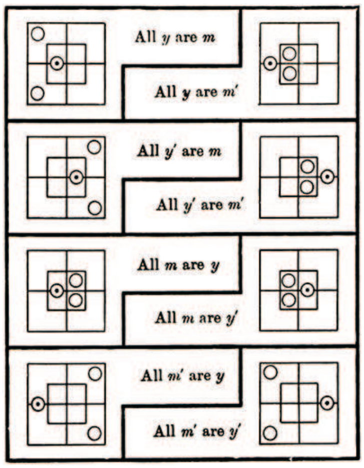
$$\boxed{\begin{array}{c} \text{eQR} \\ \text{iPQ} \\ \hline \text{oPR} \end{array}}$$

Ferio



En reprenant l'idée des diagrammes, mais avec une idée pédagogique et ludique en arrière-plan, Lewis Carroll, développa[6] vers la fin du dix-neuvième siècle une méthode de vérification géométrique des syllogismes qu'il généralisera par la suite aux poly-syllogismes (*sorites*).

Voici une illustration extraite de son livre et qui montre un aspect graphique de sa méthode :



La méthode de Carroll consiste en un marquage des zones découpées dans le carré par trois prédicats, selon qu'il y a présence ou absence d'individus de l'univers du discours ayant cette combinaison de propriétés.

6. dans : [2]

5 Une procédure de vérification arithmétique

Nous allons présenter une nouvelle procédure de vérification des syllogismes – et des sorites – qui ne fait pas appel à une intuition de type géométrique. Cette procédure est purement arithmétique, dans le sens qu'elle n'utilise que des relations élémentaires entre nombres – et plus exactement, entre les nombres 0 et 1 – pour vérifier ou falsifier des syllogismes tels que nous les avons définis.

Un tel syllogisme canonique fait intervenir trois prédicats, que nous avons nommés P, Q et R. Chacun de ces trois prédicats s'applique, ou non, à un individu de l'univers du discours. Un individu quelconque, disons x, est donc caractérisé par trois propriétés : P s'applique ou non à x, Q s'applique ou non à x et R s'applique ou non à x.

Nous pouvons introduire une *valuation* v, qui attribue à x la valeur $v(P) = 1$ si P s'applique à x, et $v(P) = 0$ sinon. Si nous appelons $v(P)$ la P-étiquette de x, et ainsi de suite pour les deux autres prédicats, il en ressort que chaque x de l'univers du discours est caractérisé par trois *étiquettes* distinctes, dont chacune prend la valeur 0 ou 1.

Nous avons donc la correspondance suivante : aPQ n'est qu'une abréviation de $\forall x(Px \rightarrow Qx)$ qui signifie que, tous les individus qui ont la propriété P, ont aussi la propriété Q. Traduit en termes d'étiquettes, cela décrit un monde dans lequel tout individu x qui a une P-étiquette égale à 1, a aussi une Q-étiquette égale à 1. Formellement : pour tout x, Si $v(P) = 1$ alors $v(Q) = 1$. Ce qui équivaut à dire que jamais $v(P) > v(Q)$, donc qu'on aura toujours $v(P) \leq v(Q)$.

Une *traduction* entre certains énoncés de notre langage logique et affirmations dans le langage des étiquettes est maintenant possible :

A l'énoncé **aPQ** on fait correspondre $v(P) \leq v(Q)$, ou simplement $P \leq Q$

Cette traduction a la propriété que des énoncés logiques sont traduits par des affirmations vraies dans le langage des étiquettes, car $P \leq Q$ équivaut à dire qu'il n'y a pas d'individu avec $P = 1 \wedge Q = 0$:

$$\mathbf{aPQ} \quad \text{ssi} \quad \forall x(Px \rightarrow Qx) \quad \text{ssi} \quad P \leq Q$$

Qu'en est-il de l'énoncé **ePQ** ? Il faut se souvenir que ePQ est l'abréviation de $\forall x(Px \to \neg Qx)$. Si cet énoncé est vrai, cela signifie que pour tous les individus x, si $v(P) = 1$ alors $v(Q) = 0$. Cela est équivalent à : si $v(Q) = 1$ alors $v(P) = 0$. Il est donc incompatible pour tout individu d'avoir les deux étiquettes égales à 1. Autrement dit, dans notre notation simplifiée, $v(P) + v(Q) \leq 1$. On peut remarquer aussi que $\forall x(Px \to \neg Qx)$ est logiquement équivalent à $\forall x(Px \to \overline{Q}x)$, où $\overline{Q}$ est le complémentaire, la négation de Q, c'est-à-dire $v(\overline{Q}) = 1 - v(Q)$. A **ePQ** nous faisons correspondre la même affirmation sur les étiquettes qu'à $\mathbf{aP\bar{Q}}$, donc $P \leq 1-Q$ ou encore $P+Q \leq 1$.

Dans le cas de l'énoncé **iPQ**, autrement dit $\exists x(Px \wedge Qx)$, la signification est qu'il existe un individu avec les deux propriétés P et Q. Dans ce cas il existe au moins un individu avec les deux étiquettes $v(P) = v(Q) = 1$, ou, dans la notation simplifiée, $P = 1 \wedge Q = 1$.

Dans la foulée, nous avons immédiatement la traduction de **oPQ**, qui signifie $\exists x(Px \wedge \neg Qx)$. D'après les remarques précédentes, cet énoncé correspond à l'affirmation qu'il existe un individu avec les étiquettes $P = 1 \wedge Q = 0$.

Si nous résumons, nous avons les règles de traduction suivantes pour les énoncés apparaissant dans les syllogismes canoniques :

énoncés	affirmations
aPQ	$P \leq Q$
ePQ	$P + Q \leq 1$
iPQ	$P = 1 \wedge Q = 1$
oPQ	$P = 1 \wedge Q = 0$

Nous pouvons compléter ce tableau, bien que ce ne soit pas strictement nécessaire, par des règles impliquant la négation de prédicats :

énoncés	affirmations
$\mathrm{aP\bar{Q}}$	$P + Q \leq 1$
$\mathrm{a\bar{P}Q}$	$1 \leq P + Q$
$\mathrm{a\bar{P}\bar{Q}}$	$Q \leq P$

énoncés	affirmations
$\mathrm{eP\bar{Q}}$	$P \leq Q$
$\mathrm{e\bar{P}Q}$	$Q \leq P$
$\mathrm{e\bar{P}\bar{Q}}$	$1 \leq P + Q$

énoncés	affirmations
$\mathrm{iP\bar{Q}}$	$P = 1 \wedge Q = 0$
$\mathrm{i\bar{P}Q}$	$P = 0 \wedge Q = 1$
$\mathrm{i\bar{P}\bar{Q}}$	$P = 0 \wedge Q = 0$

énoncés	affirmations
$\mathrm{oP\bar{Q}}$	$P = 1 \wedge Q = 1$
$\mathrm{o\bar{P}Q}$	$P = 0 \wedge Q = 0$
$\mathrm{o\bar{P}\bar{Q}}$	$P = 0 \wedge Q = 1$

Ces règles de traduction produisent une correspondance entre des énoncés canoniques et des affirmations arithmétiques, simplifiée par l'identification des étiquettes avec le symbole de prédicat : dans les affirmations arithmétiques, nous écrivons P pour $v(P)$. Les étiquettes ne prennent que des valeurs numériques 0 ou 1. L'important est qu'un énoncé est vrai si, et seulement si l'affirmation correspondante est vraie dans le monde arithmétique.

Cela signifie qu'un syllogisme est valide si, et seulement si le raisonnement arithmétique – essentiellement des inégalités – est correct. Prenons les deux syllogismes, dont nous avons montré la validité : BARBARA et FERIO.

$$\text{BARBARA} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{aQR} \\ \mathrm{aPQ} \\ \hline \mathrm{aPR} \end{array} \qquad \text{se traduit par :} \qquad \boxed{\begin{array}{c} Q \leq R \\ P \leq Q \\ \hline P \leq R \end{array}}$$

Il est clair que des hypothèses $Q \leq R$ et $P \leq Q$, on tire immédiatement par transitivité, $P \leq R$. De même pour le second syllogisme :

$$\text{FERIO} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{eQR} \\ \mathrm{iPQ} \\ \hline \mathrm{oPR} \end{array} \qquad \text{se traduit par :} \qquad \boxed{\begin{array}{c} Q + R \leq 1 \\ P = 1 \wedge Q = 1 \\ \hline P = 1 \wedge R = 0 \end{array}}$$

A nouveau on constate immédiatement que si $Q + R \leq 1$, et qu'il existe un individu avec les étiquettes $P = 1$ et $Q = 1$, alors celui-ci possède aussi une étiquette $R = 0$, car dans ce cas $1 + R \leq 1$.

Refaisons l'exercice pour les deux autres syllogismes de la première figure, CELARENT et DARII :

$$\text{CELARENT} \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{eQR}\\ \text{aPQ}\end{array}}{\text{ePR}} \qquad \text{se traduit par :} \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}Q + R \leq 1\\ P \leq Q\end{array}}{P + R \leq 1}}$$

Il est clair que de $P \leq Q$ on tire $P + R \leq Q + R$, et donc avec $Q + R \leq 1$ on a directement $P + R \leq 1$.

$$\text{DARII} \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{aQR}\\ \text{iPQ}\end{array}}{\text{iPR}} \qquad \text{se traduit par :} \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}Q \leq R\\ P = 1 \wedge Q = 1\end{array}}{P = 1 \wedge R = 1}}$$

Encore une déduction arithmétique simple : puisque $Q = 1$ et $Q \leq R$, il ne reste que $R = 1$.

On vérifiera facilement la validité des quatre syllogismes de la deuxième figure, évoqués plus haut dans notre tableau. Pour la troisième figure, la situation est intéressante. En dehors des quatre syllogismes cités, BOCARDO, FERISON, DISAMIS et DATISI, les scolastiques en admettent deux autres comme *concluants*, c'est-à-dire valides : DARAPTI et FELAPTON. Nous allons appliquer notre procédure de vérification arithmétique à ces syllogismes.

$$\text{BOCARDO} \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{oQR}\\ \text{aQP}\end{array}}{\text{oPR}} \qquad \text{se traduit par :} \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}Q = 1 \wedge R = 0\\ Q \leq P\end{array}}{P = 1 \wedge R = 0}}$$

Ici encore la déduction arithmétique est immédiate. Voici la traduction et la vérification pour les trois autres figures valides :

$$\text{FERISON} \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{eQR}\\ \text{iQP}\end{array}}{\text{oPR}} \qquad \text{se traduit par :} \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}Q + R \leq 1\\ Q = 1 \wedge P = 1\end{array}}{P = 1 \wedge R = 0}}$$

$$\text{DISAMIS} \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{iQR}\\ \text{aQP}\end{array}}{\text{iPR}} \qquad \text{se traduit par :} \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}Q = 1 \wedge R = 1\\ Q \leq P\end{array}}{P = 1 \wedge R = 1}}$$

$$\text{DATISI} \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{aQR}\\ \text{iQP}\end{array}}{\text{iPR}} \qquad \text{se traduit par :} \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}Q \leq R\\ Q = 1 \wedge P = 1\end{array}}{P = 1 \wedge R = 1}}$$

Alors, qu'en est-il des deux autres figures, prises en considération par les scolastiques (et par Aristote !) ?

$$\text{DARAPTI} \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{aQR}\\ \text{aQP}\end{array}}{\text{iPR}} \qquad \text{se traduit par :} \quad (?) \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}Q \leq R\\ Q \leq P\end{array}}{P = 1 \wedge R = 1}}$$

Il est clair cette fois que la conclusion $P = 1 \wedge R = 1$ ne peut pas être déduite des deux prémisses, car le prédicat Q pourrait ne s'appliquer à aucun individu, c'est-à-dire que $Q = 0$ pour tous les individus. D'une certaine façon il faudrait pouvoir exclure cette possibilité dans notre langage logique. Pour cela il faut noter que :

l'expression **iQQ** signifie $\exists x(Qx \wedge Qx) \equiv \exists x Qx,$ autrement dit, il existe au moins un individu pour lequel $Q = 1$.

Cet énoncé, **iQQ**, exprime donc bien l'hypothèse qui nous manquait. Dans ce cas, DARAPTI + iQQ correspond bien à un raisonnement valide, même si ce n'est plus un syllogisme canonique :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{aQR}\\ \text{aQP}\\ \text{iQQ}\end{array}}{\text{iPR}} \qquad \text{devient :} \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}Q \leq R\\ Q \leq P\\ Q = 1\end{array}}{P = 1 \wedge R = 1}}$$

Autre exemple d'un syllogisme incomplètement valide (auquel il manque une prémisse) :

$$\text{FELAPTON} \quad \frac{\begin{array}{c}\text{eQR}\\ \text{aQP}\end{array}}{\text{oPR}} \quad \text{se traduit par : } (?) \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}Q+R \leq 1\\ Q \leq P\end{array}}{P=1 \wedge R=0}}$$

Ici encore, on ne peut rien déduire sauf en présence d'une hypothèse supplémentaire, **iQQ**. En effet si $Q = 1$ alors $P = 1$ et $R = 0$:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{eQR}\\ \text{aQP}\\ \text{iQQ}\end{array}}{\text{oPR}} \quad \text{devient : } \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}Q+R \leq 1\\ Q \leq P\\ Q=1\end{array}}{P=1 \wedge R=0}}$$

Pour la dernière figure, la quatrième, celle qui est écartée par Aristote, nous avons trouvé trois syllogismes valides, FRESISON, DIMARIS et CAMENES. A nouveau, la vérification est de l'ordre de l'arithmétique élémentaire :

$$\text{FRESISON} \quad \frac{\begin{array}{c}\text{eRQ}\\ \text{iQP}\end{array}}{\text{oPR}} \quad \text{se traduit par : } \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}R+Q \leq 1\\ Q=1 \wedge P=1\end{array}}{P=1 \wedge R=0}}$$

$$\text{DIMARIS} \quad \frac{\begin{array}{c}\text{iRQ}\\ \text{aQP}\end{array}}{\text{iPR}} \quad \text{se traduit par : } \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}R=1 \wedge Q=1\\ Q \leq P\end{array}}{P=1 \wedge R=1}}$$

$$\text{CAMENES} \quad \frac{\begin{array}{c}\text{aRQ}\\ \text{eQP}\end{array}}{\text{ePR}} \quad \text{se traduit par : } \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}R \leq Q\\ Q+P \leq 1\end{array}}{P+R \leq 1}}$$

Les scolastiques admettent cependant deux syllogismes supplémentaires : BAMALIP et FESAPO. Et encore une fois leur validité exige une hypothèse supplémentaire, dans le premier cas, l'hypothèse **iRR** :

$$\text{BAMALIP} \quad \frac{\begin{array}{c}\text{aRQ}\\ \text{aQP}\end{array}}{\text{iPR}} \quad \text{se traduit par : } (?) \quad \boxed{\frac{\begin{array}{c}R \leq Q\\ Q \leq P\end{array}}{P=1 \wedge R=1}}$$

Sans une prémisse supplémentaire, on ne peut donc rien conclure, mais l'argument suivant est valide :

$$\begin{array}{c} \text{aRQ} \\ \text{aQP} \\ \text{iRR} \\ \hline \text{iPR} \end{array} \quad \text{devient :} \quad \boxed{\begin{array}{c} R \leq Q \\ Q \leq P \\ R = 1 \\ \hline P = 1 \wedge R = 1 \end{array}}$$

et dans le second cas, c'est l'hypothèse supplémentaire **iQQ** qui est requise :

$$\text{FESAPO} \quad \begin{array}{c} \text{eRQ} \\ \text{aQP} \\ \hline \text{oPR} \end{array} \quad \text{se traduit par :} \quad (\,?) \quad \boxed{\begin{array}{c} R + Q \leq 1 \\ Q \leq P \\ \hline P = 1 \wedge R = 0 \end{array}}$$

Cela devient un raisonnement correct avec la nouvelle hypothèse :

$$\begin{array}{c} \text{eRQ} \\ \text{aQP} \\ \text{iQQ} \\ \hline \text{oPR} \end{array} \quad \text{devient :} \quad \boxed{\begin{array}{c} R + Q \leq 1 \\ Q \leq P \\ Q = 1 \\ \hline P = 1 \wedge R = 0 \end{array}}$$

Prenons ensuite un exemple de syllogisme non valide, disons de la deuxième figure :

$$\text{Ce syllogisme :} \quad \begin{array}{c} \text{aRQ} \\ \text{iPQ} \\ \hline \text{iPR} \end{array} \quad \text{se traduit par :} \quad \boxed{\begin{array}{c} R \leq Q \\ P = 1 \wedge Q = 1 \\ \hline P = 1 \wedge R = ? \end{array}}$$

dont on ne peut rien tirer. Il n'est pas valide, car R=0 et R=1 sont possibles.

Nous avons utilisé notre procédure d'*arithmétisation* des syllogismes pour parcourir la plupart des 15 syllogismes valides et pour montrer que la traduction de leur contenu en termes arithmétiques permet d'établir très facilement leur validité. Pour les syllogismes supplémentaires considérés comme concluants, c'est-à-dire valides, par les scolastiques, nous avons repéré aisément les prémisses additionnelles nécessaires à leur validation.

Jusqu'ici nous avons parlé de syllogismes surtout de manière formelle. Il est vrai que le sujet apparaît principalement dans le cadre historique et dans des introductions philosophiques à la logique. L'ouvrage de Lewis Carroll sur la logique symbolique est probablement l'un de ceux qui ont le plus relancé l'intérêt et la discussion autour de ce sujet. Surtout qu'il contient une méthode de vérification de la validité, ainsi que de nombreux exemples, témoins souvent de l'humour et de l'imagination de l'auteur. Nous allons discuter quelques-uns de ses exemples à la lumière de notre procédure d'arithmétisation.

Un premier exemple[7], donne le ton : « Aucun goinfre ne se porte bien » et « Aucun malade n'est résistant » sont les deux prémisses dont on aimerait connaître une conclusion possible. La première étape consiste à formaliser ces hypothèses. Nous choisissons deux symboles de prédicats : G pour *goinfre*, R pour *résistant*. Un troisième prédicat P signifie *se porte bien*. Le prédicat M pour *malade* n'est pas nécessaire si nous admettons que *malade* est la négation de *se porte bien*, donc M peut s'écrire $\bar{\text{P}}$. Les hypothèses peuvent donc s'écrire :

$$\begin{array}{c} \text{eGP} \\ \text{e}\bar{\text{P}}\text{R} \\ \hline ??? \end{array} \quad \text{et se traduit par :} \quad \boxed{\begin{array}{c} G+P \leq 1 \\ R \leq P \\ \hline ??? \end{array}}$$

On voit que dans l'inégalité $R \leq P$ on peut rajouter G de chaque côté et obtenir ainsi $G + R \leq G + P \leq 1$. La conclusion $G + R \leq 1$, autrement dit eGR ou encore, « Aucun goinfre n'est résistant », apparaît. Donc finalement, nous avons le syllogisme valide :

$$\begin{array}{c} \text{eGP} \\ \text{e}\bar{\text{P}}\text{R} \\ \hline \text{eGR} \end{array} \quad \text{et sa traduction :} \quad \boxed{\begin{array}{c} G+P \leq 1 \\ R \leq P \\ \hline G+R \leq 1 \end{array}}$$

Autre exemple tiré du livre de Carroll[8] : « Aucun de mes fils n'est malhonnête » et « On respecte toujours un homme honnête » sont les deux prémisses. A nouveau, nous choisissons les symboles de prédicats : F pour *est mon fils*, H pour *est honnête* et R pour *est respecté*. Le symbole $\bar{\text{H}}$ signifie

7. cf. [2] p.143
8. p.149

est malhonnête. Les hypothèses deviennent :

$$\begin{array}{c} \mathrm{eF\bar{H}} \\ \mathrm{aHR} \\ \hline ??? \end{array} \quad \text{et se traduisent par :} \quad \boxed{\begin{array}{c} F \leq H \\ H \leq R \\ \hline ??? \end{array}}$$

Il est immédiat que par transitivité on obtient l'inégalité $F \leq R$, ou aFR, et finalement « Tous mes fils sont respectés ». Le syllogisme valide s'écrit alors :

$$\begin{array}{c} \mathrm{eF\bar{H}} \\ \mathrm{aHR} \\ \hline \mathrm{aFR} \end{array} \quad \text{et sa traduction :} \quad \boxed{\begin{array}{c} F \leq H \\ H \leq R \\ \hline F \leq R \end{array}}$$

6 Les poly-syllogismes ou sorites

Selon Aristote (Metaphy. 1, 3,11, etc.), *poly-syllogisme* ou *sorite* signifie : suite de syllogismes agencés de telle sorte que l'attribut de chaque proposition devienne le sujet de la suivante. Ainsi : tout A est B, or tout B est C, or tout C est D, or tout D est E, donc tout A est E. Selon cette suite, l'attribut de chaque proposition devient le sujet de la suivante jusqu'à la conclusion qui a pour sujet le sujet de la première proposition et pour attribut l'attribut de l'avant-dernière[9]. Pour nous, le sorite désigne plus généralement une séquence d'énoncés canoniques qu'on peut considérer comme une itération de syllogismes.

Lewis Carroll a généralisé sa méthode de vérification pour l'étendre aux sorites. Nous allons en faire de même pour la méthode de vérification arithmétique. Pour introduire le sujet, nous allons reprendre un exemple tiré du livre de Carroll[10] :

1. Aucun A n'est $\bar{\mathrm{B}}$
2. Tous les B sont des C
3. Tous les C sont des D
4. Aucun $\bar{\mathrm{E}}$ n'est $\bar{\mathrm{A}}$
5. Tous les H sont des $\bar{\mathrm{E}}$

9. définition trouvée sur Wikipedia
10. p. 159

Si nous codifions ces énoncés et si nous appliquons nos règles de traduction à ce sorite, nous obtenons :

$$\begin{array}{c} \mathrm{eA}\bar{\mathrm{B}} \\ \mathrm{aBC} \\ \mathrm{aCD} \\ \mathrm{e}\bar{\mathrm{E}}\bar{\mathrm{A}} \\ \mathrm{aH}\bar{\mathrm{E}} \\ \hline ??? \end{array} \qquad \text{qui devient :} \qquad \boxed{\begin{array}{c} A \leq B \\ B \leq C \\ C \leq D \\ 1 \leq E + A \\ H + E \leq 1 \\ \hline ??? \end{array}}$$

Nous voyons que des trois premières inégalités nous pouvons tirer $A \leq D$ par transitivité. Par addition de E nous avons : $1 \leq E + A \leq E + D$. En combinant ce résultat avec le dernier énoncé, nous trouvons : $H + E \leq E + D$ donc $H \leq D$, c'est-à-dire aHD ou « Tous les H sont des D ». Le sorite devient :

$$\begin{array}{c} \mathrm{eA}\bar{\mathrm{B}} \\ \mathrm{aBC} \\ \mathrm{aCD} \\ \mathrm{e}\bar{\mathrm{E}}\bar{\mathrm{A}} \\ \mathrm{aH}\bar{\mathrm{E}} \\ \hline \mathrm{aHD} \end{array} \qquad \text{et sa traduction :} \qquad \boxed{\begin{array}{c} A \leq B \\ B \leq C \\ C \leq D \\ 1 \leq E + A \\ H + E \leq 1 \\ \hline H \leq D \end{array}}$$

Un peu plus loin dans le livre de Carroll[11], nous trouvons le problème suivant : Quelle conclusion tirer des énoncés suivants ?

1. Tous les agents de police du secteur dînent avec notre cuisinière
2. Aucun homme aux cheveux longs ne peut être autre chose qu'un poète
3. Amos Judd n'a jamais fait de séjour en prison
4. Les "cousins" de notre cuisinière aiment tous le gigot froid
5. Seuls les agents de police du secteur sont poètes
6. Seuls ses "cousins" dînent avec notre cuisinière
7. Les hommes aux cheveux courts ont tous fait un séjour en prison

11. p.160

Dans un premier temps nous allons introduire les symboles de prédicats suivants :

A : agent de police du secteur
D : dîne avec notre cuisinière
L : a les cheveux longs
P : est poète
J : est Amos Judd
C : est "cousin" de notre cuisinière
S : a fait un séjour en prison
G : aime le gigot froid

Les énoncés deviennent :

$$\begin{array}{c} \mathrm{aAD} \\ \mathrm{eL\bar{P}} \\ \mathrm{aJ\bar{S}} \\ \mathrm{aCG} \\ \mathrm{aPA} \\ \mathrm{aDC} \\ \mathrm{a\bar{L}S} \\ \hline ??? \end{array} \qquad \text{et se traduisent par :} \qquad \boxed{\begin{array}{c} A \leq D \\ L \leq P \\ J + S \leq 1 \\ C \leq G \\ P \leq A \\ D \leq C \\ 1 \leq L + S \\ \hline ??? \end{array}}$$

De (1) et (5) nous tirons $P \leq D$, puis, à l'aide de (6) $P \leq C$, ensuite avec (4) nous avons le résultat $P \leq G$. De (3) et (7) nous tirons $J \leq L$, puis grâce à (2), $J \leq P$. En combinant ce résultat avec le précédent, il vient $J \leq G$, notre conclusion : « Amos Judd aime le gigot froid ». Le sorite complet est donc :

$$\begin{array}{c} \mathrm{aAD} \\ \mathrm{eL\bar{P}} \\ \mathrm{aJ\bar{S}} \\ \mathrm{aCG} \\ \mathrm{aPA} \\ \mathrm{aDC} \\ \mathrm{a\bar{L}S} \\ \hline \mathrm{aJG} \end{array} \qquad \text{et sa traduction arithmétique :} \qquad \boxed{\begin{array}{c} A \leq D \\ L \leq P \\ J + S \leq 1 \\ C \leq G \\ P \leq A \\ D \leq C \\ 1 \leq L + S \\ \hline J \leq G \end{array}}$$

La stratégie consiste donc à trouver deux syllogismes, qui ne totalisent que trois prédicats différents, et d'en trouver une conclusion, qui, elle-même, sera utilisée pour continuer le raisonnement. L'itération de cette procédure conduira à la conclusion générale, lorsque tous les énoncés auront été utilisés.

Un dernier exemple, tiré lui aussi de Carroll[12] nous permettra d'illustrer cette stratégie de vérification. Le problème consiste à trouver une conclusion aux énoncés suivants :

1. J'apprécie beaucoup tous les cadeaux de Jean
2. Seul cet os satisfera mon chien
3. Je veille soigneusement sur tout ce que j'apprécie beaucoup
4. Cet os était un cadeau reçu de Jean
5. Les choses sur lesquelles je veille soigneusement sont des choses dont je ne fais pas cadeau à mon chien

Les symboles de prédicats suivants nous permettent de traduire les cinq énoncés dans le formalisme logique. Voici les formules résultantes et leurs versions arithmétisées :

A : que j'apprécie beaucoup
C : est un cadeau de Jean
O : cet os
S : qui satisfait mon chien
V : sur quoi je veille soigneusement
D : que je donne à mon chien

Le sorite possède la structure de prémisses suivante :

$$\begin{array}{c} \text{aCA} \\ \text{aSO} \\ \text{aAV} \\ \text{aOC} \\ \text{aV}\bar{\text{D}} \\ \hline ??? \end{array} \qquad \text{et la version arithmétisée :} \qquad \boxed{\begin{array}{c} C \leq A \\ S \leq O \\ A \leq V \\ O \leq C \\ V + D \leq 1 \\ \hline ??? \end{array}}$$

La stratégie exposée plus haut révèle une simple séquence linéaire d'inégalités : $S \leq O \leq C \leq A \leq V$. D'où nous tirons par transitivité $S \leq V$. En

12. p. 165

ajoutant D à chaque côté de cette inégalité, et en utilisant la dernière propriété, nous avons $S + D \leq V + D \leq 1$. Donc la conclusion est $S + D \leq 1$, ce qui veut dire eSD, et en langage naturel : « Mon chien n'est satisfait d'aucun cadeau que je lui fais ».

Il faut peut-être souligner que l'ordre dans lequel apparaissent les hypothèses ne joue pas de rôle pour la validité. Mais dans le processus de vérification ou de découverte d'une conclusion, il faut tout d'abord trouver un ordre adéquat des prémisses.

Pour le plaisir, voici le sorite en entier :

$$\begin{array}{c} \text{aCA} \\ \text{aSO} \\ \text{aAV} \\ \text{aOC} \\ \text{aV}\bar{\text{D}} \\ \hline \text{eSD} \end{array} \quad \text{et sa version arithmétisée :} \quad \boxed{\begin{array}{c} C \leq A \\ S \leq O \\ A \leq V \\ O \leq C \\ V + D \leq 1 \\ \hline S + D \leq 1 \end{array}}$$

7 Conclusions

Dans l'optique de la logique formelle contemporaine, il existe divers moyens mathématiques de vérifier un raisonnement quelconque. Ces moyens sont répartis en deux catégories, les méthodes *sémantiques* et les méthodes *syntaxiques*. Le théorème de complétude – dû à Gödel – montre leur équivalence. Nous avons noté au passage l'utilisation possible de tableaux, d'arbres de preuve ainsi que dans le cas des syllogismes catégoriques, canoniques, de méthodes plus géométriques (diagrammes) qui se rapprochent des tables de vérité de la logique des propositions. L. Carroll a fait un art et un jeu [13] du problème de la vérification des syllogismes. Nous avons évoqué cette démarche sans parler des détails de sa réalisation, le livre cité étant une source de plaisir et de connaissances, dont nous ne pouvons que conseiller la lecture.

Notre intention dans ce travail est de réduire la compréhension de la mécanique des syllogismes à des considérations arithmétiques. Pour cela nous proposons une traduction de la structure des énoncés canoniques en termes d'affirmations sur les nombres, plus précisément sur les nombres 0 et 1. Puisque

13. voir : [2]

les objets mathématiques résultant de cette traduction sont si élémentaires, nous avons choisi d'adopter un langage métaphorique très simple. Ainsi, par rapport à un prédicat P, chaque individu de l'univers du discours possède une P-*étiquette* qui prend la valeur 1 si l'individu possède la qualité exprimée par P, et 0 sinon. Dans le cas d'un syllogisme catégorique, chaque individu possède donc trois étiquettes. La traduction proposée rend visible ces étiquettes et permet des manipulations élémentaires qui autorisent la vérification, mais aussi la découverte d'une conclusion.

Parmi les 256 syllogismes possibles nous avons ainsi redécouvert les 15 qui sont valides dans le sens actuel. Les scolastiques dénombrent 19 syllogismes qu'ils appellent *concluants*, mais qui ne sont pas exactement valides sans une prémisse d'existence supplémentaire. Leibniz en a même accepté 24 [14]. La vérification arithmétique offre l'avantage de nous faire voir facilement quelle est la prémisse manquante, comme nous l'avons montré sur l'un ou l'autre exemple.

Comme Lewis Carroll, nous avons finalement étendu la méthode aux polysyllogismes (ou sorites), c'est-à-dire un raisonnement réductible à des enchaînements de syllogismes. Ici, l'ordre dans lequel on choisit de placer les hypothèses, joue un rôle important dans la vérification. C'est l'arithmétisation des syllogismes qui nous guide dans le choix d'un ordre, à partir duquel généralement la transitivité réduit le problème considérablement.

Finalement, même si la *syllogistique* n'a plus aujourd'hui une grande importance dans le domaine de la logique, elle conserve un intérêt historique et peut-être pédagogique. L'arithmétisation proposée ici est un exemple de l'intérêt que peuvent présenter les *traductions* à l'intérieur des sciences formelles et les différentes formes d'intuition suscitées par les représentations diverses.

Références

[1] Aristote, *Organon III* (Trad. Tricot), Vrin, 1992

[2] Carroll, Lewis, *Logique sans peine*, Hermann, 1966

[3] Smullyan, Raymond M., *First Order Logic*, Springer, 1968

[4] Volken, Henri, *Petit précis de logique formelle*, Unil, Cahiers de l'IMA No. 38, 2004

14. dans : *Dissertatio de Arte Combinatoria*, non traduit en français